

رياض عبد الرحيم عبد الحافظ عوض

الرياضيات

■ مبرهنات النهاية

■ المعادلات التفاضلية

■ المصفوفات

■ المتتاليات والمتسلسلات العددية

■ نظرية الزمر

■ العلاقات

■ الدوال والمخططات

A

1

5

7

8

4

3

2

6

1

B

C

$$(B \cap C) \setminus (A^c \cap D)$$

B^c

B

C

C^c



www.darsafa.net

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ وَقُلْ أَعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ

إِلَىٰ عِلْمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صَلَّى اللَّهُ
عَلَيْهِ وَسَلَّمَ

الرياضيات

- مبرهنات النهاية
- المعادلات التفاضلية
- المصفوفات
- المتتاليات والمتسلسلات العددية
- نظرية الزمر
- العلاقات
- الدوال والمخططات

رياض عبد الرحيم عبد الحافظ عوض

الطبعة الأولى

2014م – 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع – عمان

المملكة الأردنية الهاشمية

رقم الإبداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2011 / 1 / 316)

510

عوض، رياض عبد الرحيم عبد الحافظ
الرياضيات: مبرهنات النهاية / رياض عبد الرحيم عبد الحافظ
عوض . - عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع، 2011.

() ص

ر.أ: 2011/1/316

الواصفات: الرياضيات /

♦ يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا
المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى

حقوق الطبع محفوظة للناسر

Copyright ©
All rights reserved

الطبعة الأولى

2014م - 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان - شارع الملك حسين - مجمع الفحيص التجاري - تليفاكس +962 6 4612190

هاتف: +962 6 4611169 ص. ب 922762 عمان - 11192 الاردن

DAR SAFA Publishing - Distributing

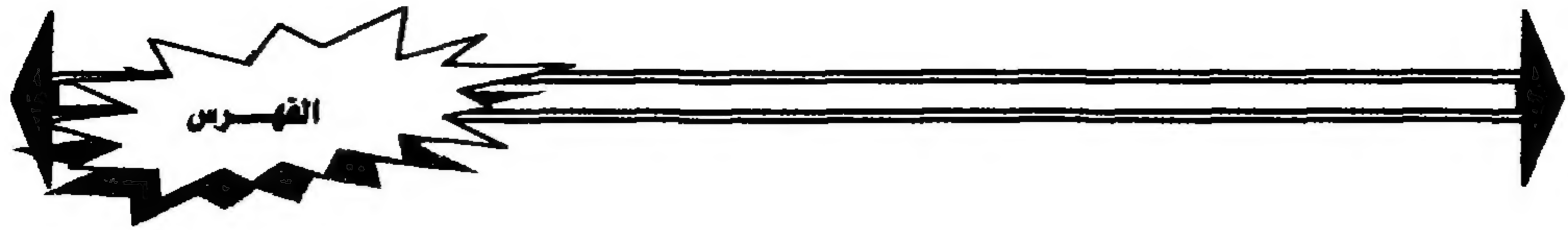
Telefax: +962 6 4612190- Tel: + 962 6 4611169

P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan

<http://www.darsafa.net>

E-mail: safa@darsafa.net

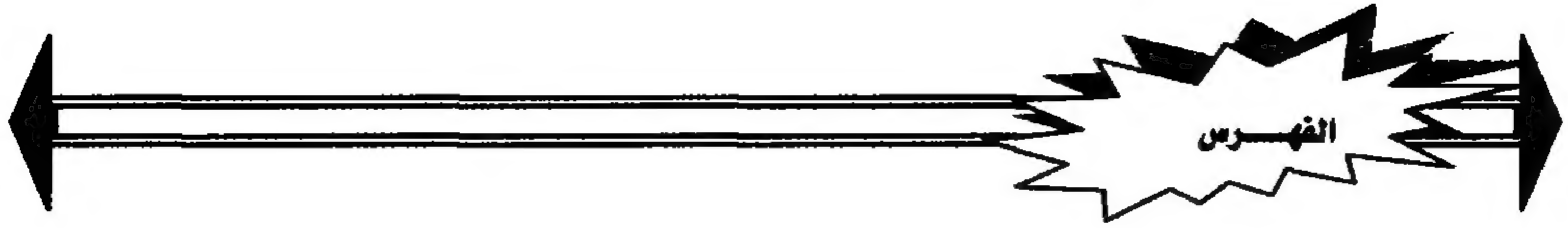
ردمك ISBN 978-9957-24-709-6



الفهرس

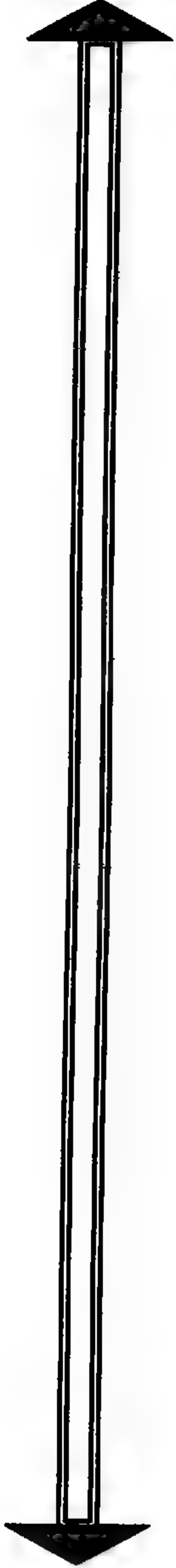
٩	الفصل الأول: مبرهنتات النهاية
٩	مقدمة
١٠	تقارب متتاليات متغيرات عشوائية
١٤	متباينة تشيشف
١٨	قانون الأعداد الكبيرة الضعيف
٢٤	قانون الأعداد الكبيرة القوي
٢٥	متباينة كالماغوروف
٢٦	مبرهنتات النهاية المركزية
٢٧	مبرهنة النهاية المركزية بصيغة ليابونوف
٣٠	مبرهنة النهاية المركزية بصيغة موافر ولا بلاس
٣٣	تمارين
٣٧	الفصل الثاني: المعادلات التفاضلية
٣٧	المعادلات التفاضلية
٤٤	تصنيف المعادلات التفاضلية
٥٠	معادلات الفروق
٦٥	الفصل الثالث: المصفوفات
٦٥	مقدمة
٦٧	تساوي مصفوفتين
٧٠	أنواع المصفوفات
٧٤	العمليات على المصفوفات
٨٧	قوى المصفوفة المربعة
٩٠	مبدول المصفوفة
١٠٩	الفصل الرابع: المتتاليات والمتسلسلات العددية
١٠٩	تعريف المتتالية العددية



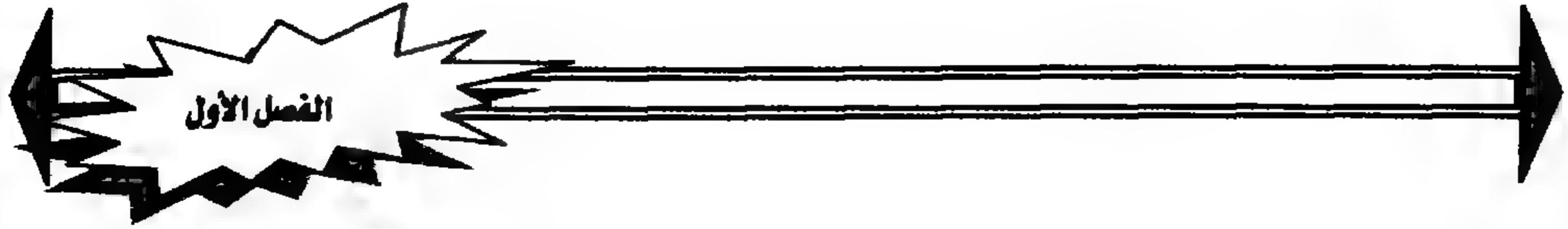


١٢٨.....	خواص المقارنة
١٣٠.....	حالات عدم التعيين
١٦٣.....	المتسلسلات الكيفية
١٧٢.....	تمارين عامة
١٧٧.....	الفصل الخامس: نظرية الزمر
١٧٨.....	مقدمة في نظرية الزمر
١٨٥.....	المجموعات المشاركة اليمنى إلى جـ هي
١٨٨.....	مبرهنة لا كرنج
١٩٩.....	أنماط الزمر ذات الرتبة ٤ وذات الرتبة ٦
٢٠٥.....	زمر التباديل
٢٣٢.....	تمارين
٢٤٩.....	الفصل السادس: العلاقات
٢٤٩.....	حاصل الضرب الكارتيزي (الجداء الديكارتية)
٢٥١.....	تمثيل الجداء الديكارتية
٢٥٦.....	العلاقات الثنائية
٢٦٣.....	فصول التكافؤ
٢٦٨.....	التجزئة
٢٧٢.....	تمارين
٢٧٩.....	الفصل السابع: الدوال والمخططات
٢٧٩.....	العلاقة
٢٨١.....	الدالة
٢٨٨.....	تصنيف خاص للدوال
٢٩٢.....	الدوال العددية
٢٩٥.....	خاصية التجميع في الأعداد الحقيقية
٣٠٤.....	تمارين





مبرهنات النهاية



الفصل الأول

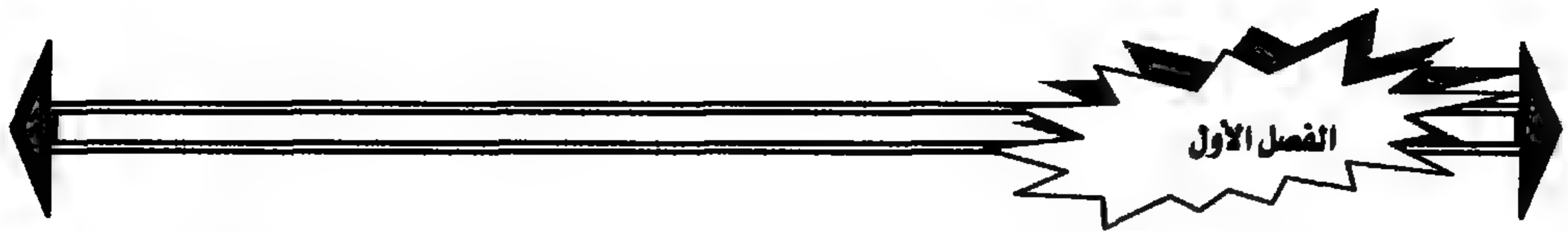
مبرهنات النهاية

١.١ مقدمة:

تدرس نظرية الاحتمالات القوانين التي تظهر عند تكرار التجارب الاحتمالية مرات عديدة تحت نفس الشروط. وتسمح دراسة مثل هذه القوانين بالتنبؤ بنتائج تلك التجارب، وعندما يكون عدد التكرارات كبيراً بكفاية، فإن بعض مميزات المتغيرات والحوادث العشوائية تصبح تقريباً غير عشوائية، ويقال عادة في مثل هذه الحالة أن المميزات تتمتع بصفة الاستقرار (invariant). فمثلاً، التكرار النسبي يتمتع بهذه الصفة، أي إذا كانت شروط التجربة ثابتة أو ثابتة تقريباً، فإن التكرار النسبي يتأرجح حول قيمة ثابتة. وبعبارة أخرى، عندما تكون $n \rightarrow \infty$ ، فإن التكرار النسبي يفقد صفة العشوائية، وكذلك الوسط الحسابي لنتائج التكرارات $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum s_r$ يتمتع أيضاً بصفة الاستقرار عندما تكون n كبيرة.

يتطلب صنف هام من المسائل في الإحصاء الرياضي، تعيين نهاية دوال معينة في n متغير عشوائي، وكذلك نهاية توزيعاتها عندما $n \rightarrow \infty$ ، وبعبارة أخرى، إذا كان $(s_1, s_2, \dots, s_n) = s$ متغير عشوائي ذو n بعد و $\bar{s}(s)$ دالة ما، التي تعتبر أيضاً متغير عشوائي، ويطلب تعيين نهاية $\bar{s}(s)$ ونهاية توزيعها (التوزيع المقارب لها) عندما $n \rightarrow \infty$. إن مجموعة المبرهنات التي





تعطي الحل لمثل هذه المسائل تدعى بمبرهنات النهاية (Limit Theorems).
وهذه المبرهنات تصنف إلى نوعين:

١- قانون الأعداد الكبيرة: وهي مجموعة مبرهنات النهاية، التي تعين نهاية متوسط متغيرات عشوائية، عند شروط معينة، وهذه تندرج تحت اسم 'قانون الأعداد الكبيرة' (Law of Large Numbers).

٢- مبرهنات النهاية المركزية: وهي مجموعة مبرهنات النهاية التي تعين نهاية توزيعات دوال في متغيرات عشوائية، تحت شروط معينة، وتندرج تحت اسم 'مبرهنات النهاية المركزية' (Central Limit Theorems).

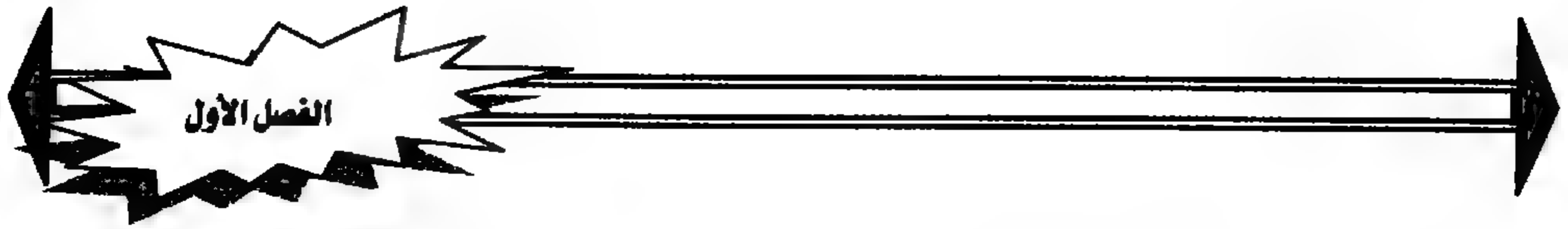
يهدف هذا الفصل إلى تقديم بعض الصيغ الأساسية لقانون الأعداد الكبيرة على هيئة مبرهنات بالإضافة إلى مبرهنات أساسية في النهاية المركزية. ستعرض في البداية، وبصورة موجزة لتقارب متتاليات متغيرات عشوائية.

٢.١ تقارب متتاليات متغيرات عشوائية

Convergence of Sequences of Random Variables

لتكن s_1, s_2, \dots, s_n ، متتالية متغيرات عشوائية نرمز لها بـ $\{s(n)\}$ ، المعرفة على الفضاء الاحتمالي (Ω, \mathcal{A}, P) . بما أن المتغيرات العشوائية المشكلة لهذه المتتالية عبارة عن دوال في الحوادث الأولية $\omega \in \Omega$ ، باختيار $\omega \in \Omega$ نحصل على المتتالية العددية $\{s_n(\omega)\}$ ، التي يمكن أن تكون متقاربة أو متباعدة.





تعريف ١.٢.١

نقول عن متتالية المتغيرات العشوائية $\{S_n\}$ إنها متقاربة عند الحادث الأولي $\omega \in \Omega$ إذا كانت المتتالية العددية $\{S_n(\omega)\}$ متقاربة.

تعريف ١.٢.٢

نقول إن متتالية المتغيرات العشوائية $\{S_n\}$ متقاربة عند الحادث $\omega \in \Omega$ ، إذا كانت هذه المتتالية متقاربة عند كل حادث أولي $\omega \in \Omega$.

تعريف ١.٢.٣

يقال عن متتالية المتغيرات العشوائية $\{S_n\}$ إنها متقاربة من المتغير العشوائي S عند الحادث ω إذا تحقق الشرط الآتي:

$$(1.2.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = S(\omega) \quad \text{نها } S_n(\omega) = S(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

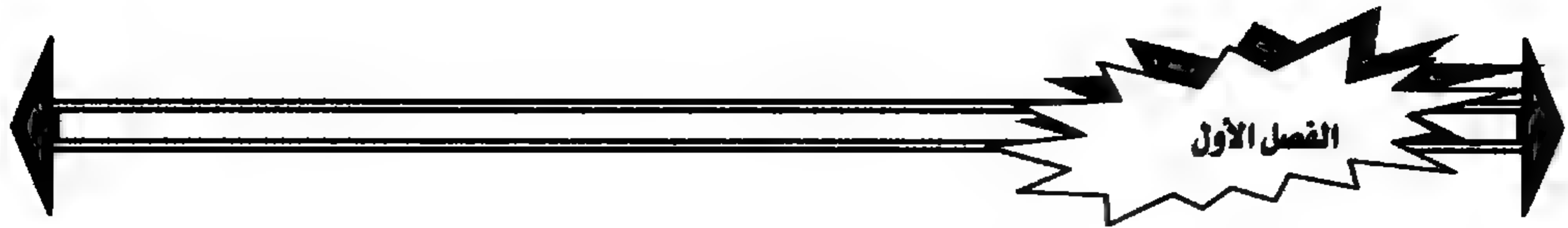
مثال (١.٢.١):

لتكن متتالية المتغيرات العشوائية $\{S_n\}$ ، حيث $n = 1, 2, \dots$ ؛ $S_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{إذا } \omega \in A_n \\ 0 & \text{وإلا} \end{cases}$ ،
 $S(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{إذا } \omega \in A \\ 0 & \text{وإلا} \end{cases}$ ،
 بما أن:

$$\left. \begin{aligned} &S_n(\omega) = 1 \text{ إذا } \omega \in A_n \\ &S_n(\omega) = 0 \text{ وإلا} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = S(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{إذا } \omega \in A \\ 0 & \text{وإلا} \end{cases}$$

وغير معرف عندما $1 - \epsilon > \epsilon > 0$ ، فإن متتالية المتغيرات العشوائية $\{S_n\}$





تتقارب من س = ١ عندما $\epsilon = ١$ وتتقارب من س = ٠ عند الحادث $أ = [١, ٠]$.
وبصورة خاصة، إذا كان $أ = \Omega$ ، فيقال بأن متتالية المتغيرات العشوائية $\{س_n\}$ متقاربة من س باحتمال يساوي الواحد أو تتقارب تقارباً شبه أكيد (almost certain co mergingence).

تعريف ٤.٢.١:

التقارب شبه الأكيد Almost Certain Convergence

نقول عن متتالية المتغيرات العشوائية $\{س_n\}$ إنها متقاربة من س باحتمال يساوي الواحد (تقارب شبه أكيد)، إذا تحقق الشرط الآتي:

$$(٢.٢.١) \quad ١ = \left(\bigcap_{\epsilon > 0} \left\{ \Omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} س_n(\omega) = س(\omega) \right\} \right)$$

ويرمز لهذا التقارب بـ:

$$س_n \xrightarrow{p} س \quad \text{أو} \quad س_n \xrightarrow{a.s.} س$$

أو في بعض الأدبيات الإحصائية بـ $س_n \xrightarrow{p} س$ أو $س_n \xrightarrow{a.s.} س$.

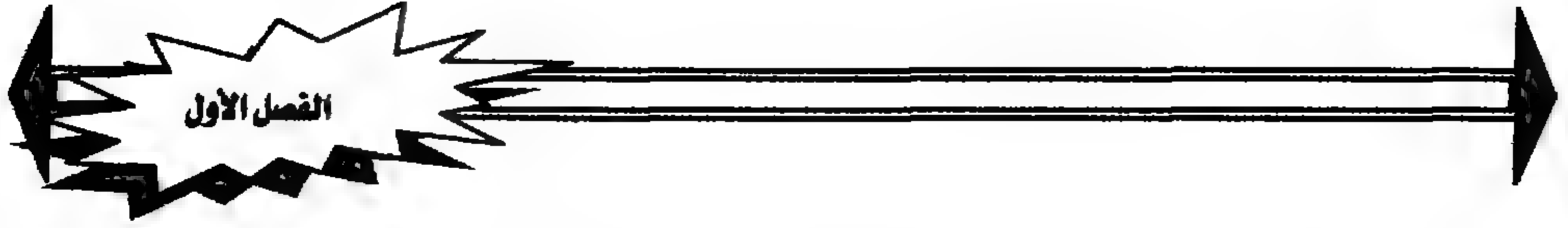
تعريف ٥.٢.١:

التقارب بالاحتمال Convergence in probability

نقول عن متتالية من المتغيرات العشوائية $\{س_n\}$ بأنها متقاربة بالاحتمال من المتغير العشوائي (أو غير العشوائي) س، إذا تحقق الشرط:

$$(٣.٢.١) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|س_n - س| \geq \epsilon) = ٠, \quad \forall \epsilon > ٠$$





ويرمز للتقارب بالاحتمال عادة بـ s_n — احتمال تقرب — s_n .

نلاحظ عندما s_n — احتمال تقرب — s_n فهذا يعني أن المتتالية $\{s_n\}$ قد تكون متقاربة من s عندما تقع بعض الحوادث الأولية، وقد تكون غير متقاربة عند وقوع بعض الحوادث الأولية الأخرى المرتبطة بالتجربة نفسها، فتقارب هذه المتتالية إذن هو حادث مرتبط بالتجربة المفروضة، وأن وقوع هذا الحادث يكافئ وقوع جميع الحوادث $\{s_n - s \geq \epsilon\}$ باستثناء عدد قيمته منها وذلك مهما يكن العدد الموجب ϵ .

وبناء على ذلك، وتعريف التقارب في التحليل الرياضي، نجد أن هنالك اختلافاً بين التقارب بالاحتمال والتقارب العادي، ويتمثل هذا الاختلاف بما يلي:

إذا كانت $\{s_n\}$ متقاربة، بمفهوم التحليل الرياضي، من s عندما $n \rightarrow \infty$ ، فهذا يعني بدءاً من قيمة معينة $n_0 \in \mathbb{N}$:

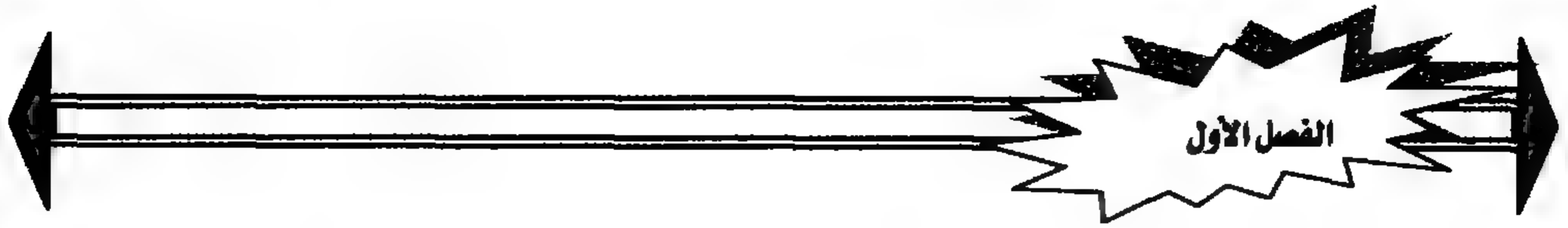
$$(1.2.4) |s_n - s| \geq \epsilon \Rightarrow n < n_0.$$

أما إذا كانت المتتالية $\{s_n\}$ متقاربة الاحتمال من s عندما $n \rightarrow \infty$ ، فإنه من أجل بعض القيم s يمكن أن تكون المتباينة $|s_n - s| \geq \epsilon$ غير متحققة.

ملاحظة ١.٢.١

إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية $\{s_n\}$ متقاربة من s باحتمال يساوي الواحد، فهي بالضرورة متقاربة بالاحتمال من s ، ويمكن إثبات ذلك بسهولة، ونتركه للقارئ كتمرين.





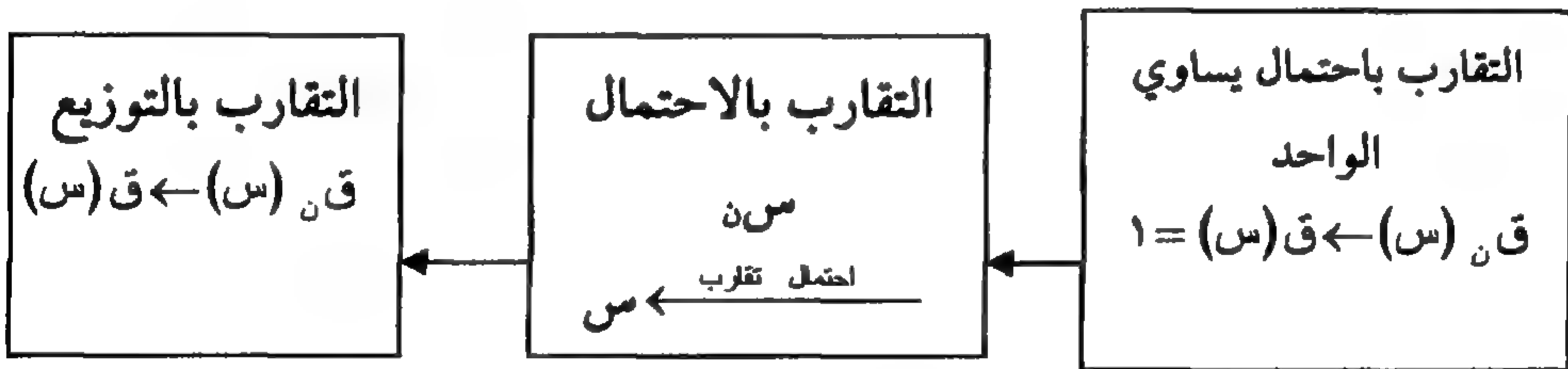
تعريف ٦.٢.١

نقول عن متتالية دوال توزيع $\{Q_n(s) = H(s) > s\}$ إنها متقاربة بالتوزيع (convergence in distribution) من الدالة $Q(s)$ ، إذا تحقق الشرط:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(s) = Q(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

حيث إن $Q(s)$ دالة مستمرة عند النقطة s . وكمثال على التقارب بالتوزيع نذكر تقارب توزيع ذي الحدين (n, H) من التوزيع الطبيعي (n, H) .

نلاحظ مما سبق أن هناك علاقة بين أنواع التقارب (التقارب بالاحتمال، التقارب باحتمال يساوي الواحد، التقارب بالتوزيع) وهذه العلاقة ممثلة بالشكل (١.٢.١).



شكل (١.١.١)

٣.١ متباينة تشيشف TCHEBICHEV INEQUALITY

ستطرق في هذا البند لمتباينة شهيرة تحلل قيمة تطبيقية محدودة، لكنها ذات قيمة نظرية كبيرة لأنها تستخدم أساساً لإثبات مجموعة من المبرهنات المنتمة لقانون الأعداد الكبيرة. وهذه المتباينة تدعى بـ 'متباينة تشيشف'.



برهنة ١.٣.١

إذا كان S متغير عشوائي حقيقي وهو (S) دالة حقيقية غير سالبة، فإن

$$(١.٣.١) \quad P\left(\sum_{k=1}^n (S_k - S) \geq \frac{[S]}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

الإثبات:

نفترض أن S متغير عشوائي مستمر دالة كثافته $q(S)$ ، عندئذ:

$$P\left(\sum_{k=1}^n (S_k - S) \geq \frac{[S]}{k}\right) = \int_{\frac{[S]}{k}}^{\infty} q(S) dS = \int_{\frac{[S]}{k}}^{\infty} q(S) dS + \int_{\frac{[S]}{k}}^{\infty} q(S) dS.$$

$$\int_{\frac{[S]}{k}}^{\infty} q(S) dS \leq \int_{\frac{[S]}{k}}^{\infty} q(S) dS = \int_{\frac{[S]}{k}}^{\infty} q(S) dS.$$

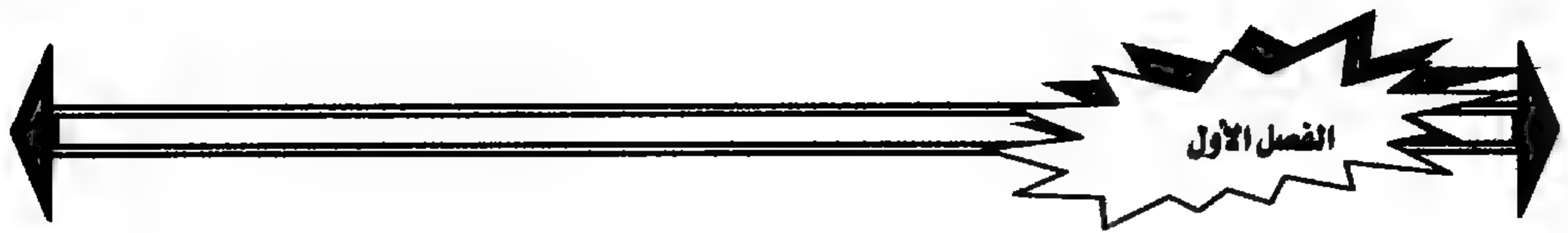
وبالقسمة على k نجد: $P\left(\sum_{k=1}^n (S_k - S) \geq \frac{[S]}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$ وهو المطلوب.

وبشكل مشابه يمكن الإثبات في حالة S متغير عشوائي منقطع، وذلك باستبدال التكامل بالمجموع.

متباينة تشيبيشيف:

إذا كان S متغيراً عشوائياً بمتوسط $\mu = E(S)$ ، وتباين منتهي $\sigma^2 = \text{Var}(S)$ فإن

$$(٢.٣.١) \quad P\left(\sum_{k=1}^n (S_k - \mu) \geq \frac{[S]}{k}\right) \leq \frac{\sigma^2}{k}.$$



الإثبات:

بوضع $(\mu - s)^2 = h(s)$ و σ^2 في العلاقة (١.٣.١) نحصل على
العلاقة (٢.٣.١) بما أن $\Omega_s = \{s \leq |\mu - s|\} \cup \{s > |\mu - s|\}$

والحادثان $\{s \leq |\mu - s|\}$ و $\{s > |\mu - s|\}$ متنافيان، فإن:

$$1 = (\{s \leq |\mu - s|\})_h + (\{s > |\mu - s|\})_h = (\Omega_s)_h$$

$$\text{ومنه: } (\{s > |\mu - s|\})_h = 1 - (\{s \leq |\mu - s|\})_h = 1 - \left(1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}\right)$$

وهي صيغة مكافئة لـ (٢.٣.١)، وبوضع $\epsilon = r$ ، حيث $r < \sigma$ في
العلاقة (٣.٣.١) نجد:

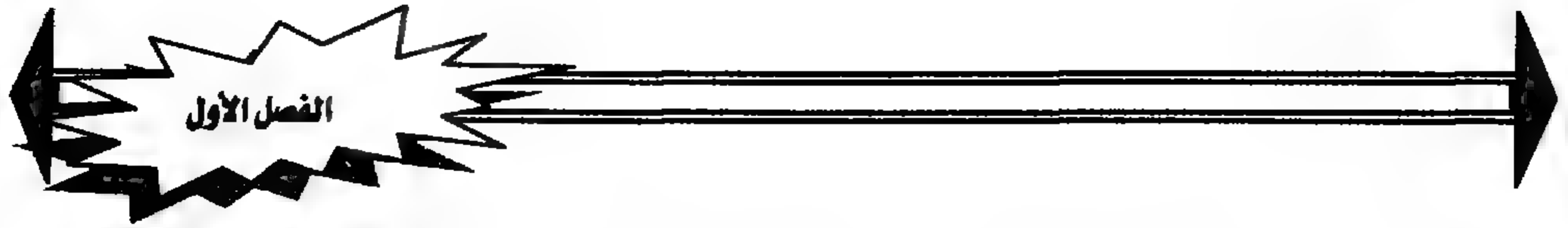
$$(\{s > |\mu - s|\})_h = (\{s > \sigma r + \mu, r - \mu\})_h = 1 - \frac{1}{r}$$

أي أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة في الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$
 σ لا يقل عن $1 - \frac{1}{r}$ ، فمثلاً عندما $r = \frac{1}{2}$: $(\{s > \sigma^2 + \mu, \sigma^2 - \mu\})_h = \frac{3}{4}$.

وهذا يعني من أجل متغير عشوائي s ، تباينه منتهي، فإن $\frac{3}{4}$ قيمة الممكنة
على الأقل تقع في إطار انحرافين معياريين عن متوسطه.

هكذا نجد أن متباينة تشيبيشيف تطبق على أي متغير عشوائي s شريطة
أن يكون تباينه منتهي، ولا نحتاج لمعرفة توزيع s . وهذه المتباينة لا تعطي طريقة
عملية لتقدير الاحتمالات، لأن الفرق بين طرفي المتباينة (٣.٣.١) عادة تبنى
وعندما $r \geq 1$ أي $(1 - \frac{1}{r})$ ، فإن المتباينة (٣.٣.١) لا تفيدنا شيئاً.





مثال (١.٣.١):

لتكن لدينا شحنة كبيرة من بضاعة مصنعة، نسبة العطب فيها ح، ونريد تعيين ن بحيث إذا أخذنا عينة عشوائية (س_١، س_٢،، س_ن) حجمها ن أو أكثر من هذه البضاعة كنا واثقين باحتمال لا يقل عن ٠,٩٥ بأن نسبة العطب في العينة يختلف عن ح بأقل من ٠,١.

لنرمز بـ ر = ١، ٢،، ن؛ س_ر لنتيجة السحب رقم ر عند تشكيل العينة العشوائية، حيث س_ر = صفر إذا كانت الوحدة المسحوبة سليمة، و س_ر = ١ إذا كانت معطوبة، ولتكن $\sum_{r=1}^n س_r = س$ عدد الوحدات المعطوبة في العينة العشوائية المؤلفة من ن وحدة، ويصبح المطلوب تعيين ن بحيث:

$$ح \left(\left| ح - \frac{س}{ن} \right| > ٠,١ \right) \leq ٠,٠٥؛ ت(س) = ح$$

$$ح \left(\left| ح - \frac{س}{ن} \right| > ٠,١ \right) = ح (|س - ح ن| > ٠,١ ن) \Leftarrow$$

$$ح (|س - ح ن| \leq ٠,١ ن) \geq ٠,٩٥ = ١ - ٠,٠٥ \dots \dots \dots (١)$$

وحسب متباينة تشيبيشيف:

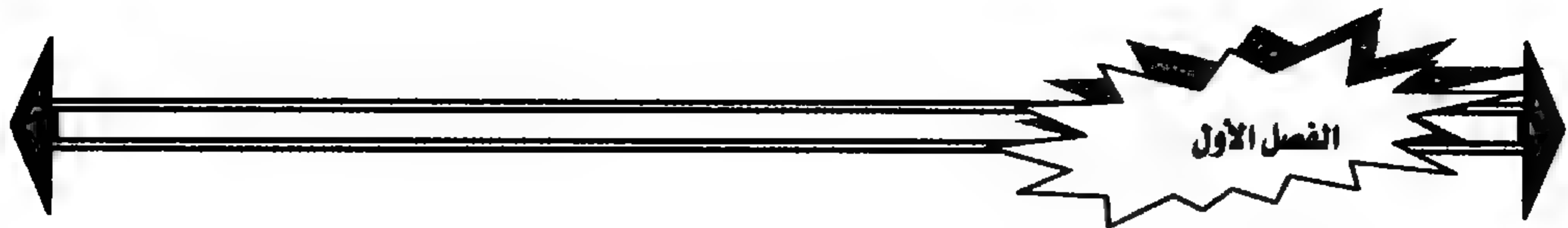
$$ح (|س - ح ن| \leq ٠,١ ن) \geq \frac{تباين س}{(٠,١ ن)^2} = \frac{ن ح ح}{(٠,١ ن)^2} = \frac{٤}{ن} \geq \frac{٢٥}{ن} \dots \dots \dots (٢)$$

$$\text{لأن } ح \geq \frac{١}{٤}، \text{ وبمقارنة (١)، (٢) نجد: } \frac{٢٥}{ن} \geq ٠,٠٥ \Leftarrow ن \leq ٥٠٠$$

مثال (٣.٣.١):

لتكن لدينا تجربة عشوائية، احتمال ظهور الحادث أ يساوي $\frac{١}{٢}$ ، أثبت أن





عدد مرات ظهور الحادث أ في ١٠٠٠ تكراراً مستقلاً للتجربة المفروضة يقع بين ٤٠٠ و ٦٠٠ باحتمال لا يقل عن ٠,٩٧.

لنرمز بـ س لعدد مرات ظهور الحادث في ن تكراراً مستقلاً للتجربة المفروضة، وبما أن $N = 1000$ ، تبين $S = N \bar{C}$ و $T(S) = N - C = 500$ ، فحسب متباينة تشيشف:

$$C(T(S) - S) \leq 1 - \frac{T(S)}{N} = 1 - \frac{500}{1000} = 0.5$$

$$C(S - 500) \leq 1 - \frac{500}{1000} = 0.5$$

٤.١ قانون الأعداد الكبيرة الضعيف

The Weak Law of Large Numbers

إن مجموعة المفاهيم المتعلقة بالتقارب بالإضافة إلى متباينة تشيشف الواردة أعلاه، تمكن من إيضاح محتوى قانون الأعداد الكبيرة.

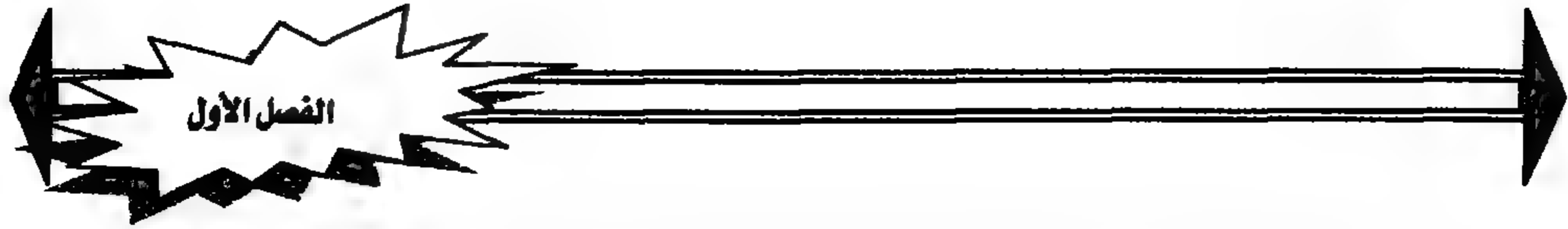
يصوغ قانون الأعداد الكبيرة العلاقة بين المميزات النظرية والتجريبية للتجارب العشوائية، وهذا القانون له صيغ مختلفة تتجلى بمجموعة من المبرهنات (تشيشف، برنولي، بواسون،.....).

تعريف ٤.١.١: قانون الأعداد الكبيرة الضعيف:

نقول عن متتالية من المتغيرات العشوائية $\{S_n\}$ إنها تخضع لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف إذا حققت الشرط:

$$(٤.١) \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \bar{C}\right| > \epsilon\right) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$





(١.٤.١) صيغة تشيبيشيف لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف:

مبرهنة ١.٤.١: مبرهنة تشيبيشيف Tchebichev Theorem

إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية s_1, s_2, \dots, s_n مستقلة متشابهة متشابهة، وذات تباينات $r = 1, 2, 3, \dots$ ، تباين $s_r = \sigma_r^2$ متناهية ومحدودة بعدد ثابت ج، فإن:

$$(١.٤.٢) \text{ نها ح } \left\{ \left| \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} s_r - \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} \right| \right\} < \epsilon$$

الإثبات:

حسب الفرض، المتغيرات $r = 1, 2, \dots, n$ ، s_r مستقلة وبالتالي:

$$\text{تباين } \left(\sum_{r=1}^n \frac{1}{n} s_r \right) = \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} \sigma_r^2 = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \sigma_r^2 \geq \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \sigma_r^2 = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \sigma_r^2$$

وبناءً على متباينة تشيبيشيف (العلاقة ٣.٣.١)

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \sigma_r^2 - 1 \leq \left[\frac{\text{تباين } \left(\sum_{r=1}^n \frac{1}{n} s_r \right)}{\epsilon} \right] - 1 \leq \left\{ \left| \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} s_r - \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} \right| \right\} \text{ ح}$$

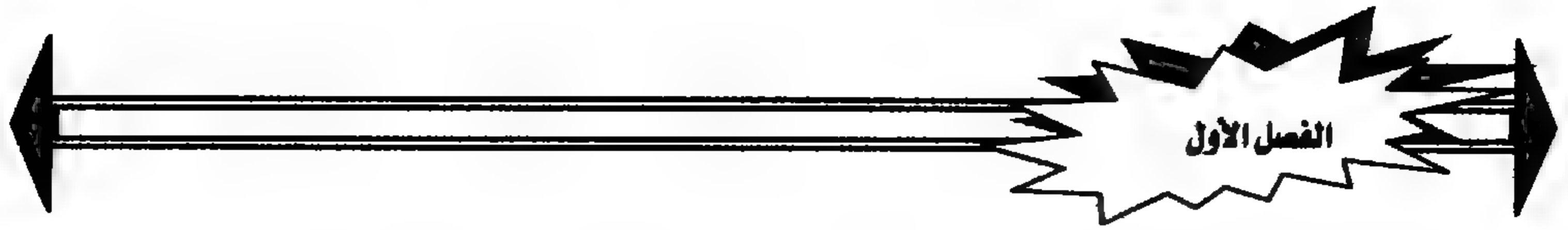
وبأخذ نهاية الطرفين عندما $n \rightarrow \infty$ ، نجد:

$$\text{نها ح } \left\{ \left| \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} s_r - \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} \right| \right\} \leq \sigma$$

وبما أن الاحتمال لا يمكن أن يتجاوز الواحد، فنحصل على العلاقة

المطلوبة.





ونحصل بالانتقال إلى الحادث المعاكس على صيغة أخرى مكافئة (٢ . ٤ . ١)

$$(٣ . ٤ . ١) \text{ نهاح } \left(\left\{ \epsilon \leq \left| \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} - s_r \right| \right\} \right) \bullet < \epsilon > \bullet$$

نلاحظ أن المتوسط $\bar{s} = \sum_{r=1}^n \frac{1}{n}$ عبارة عن متغير عشوائي،
بينما $\sum_{r=1}^n \frac{1}{n}$ مقدار ثابت.

وكحالة خاصة، إذا كان $r = 1, 2, \dots, t$ ، $s_r = \mu$ ، فإن (٢ . ٤ . ١) تكتب:

$$(٤ . ٤ . ١) \text{ نهاح } \left(\epsilon > \left| \mu - \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} \right| \right) \bullet < \epsilon > \bullet$$

وهي تعطي الأساس لتقدير المتوسط الحسابي لمجتمع، فمثلاً، لنفترض إجراء عملية قياس لمقدار فيزيائي μ ، بتكرار عملية القياس n مرة بشكل مستقل، تحت نفس الشروط، يحصل الملاحظ على النتائج s_1, s_2, \dots, s_n غير المتطابقة تماماً، عندها يؤخذ المتوسط الحسابي للقيم الملاحظة كتقريب لـ μ .

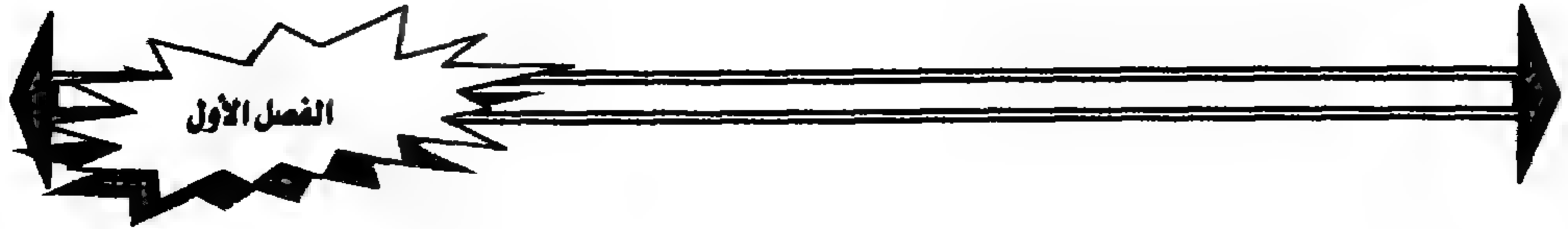
مثال (١ . ٤ . ١):

إذا كانت s_1, s_2, \dots, s_n القياسات المستقلة لمقدار فيزيائي μ ، وكانت:

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{n} (s_r - \mu)^2 = S^2$$

هل يمكن اعتبار $\sum_{r=1}^n \frac{1}{n} (s_r - \mu)^2 = S^2$ قيمة تقريبية لتباين أخطاء جهاز القياس وليكن σ^2 ؟





يمكن اعتبار σ^2 قيمة تقريبية لـ σ^2 ، إذا كان:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\bar{X}_n - \sigma^2\right| < \epsilon\right) = 1 \quad (1)$$

بما أن المتغيرات العشوائية X_1, X_2, \dots, X_n مستقلة ولها نفس التوزيع (حسب الفرض) فإن المتغيرات العشوائية X_1, X_2, \dots, X_n ، $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+r}$ مستقلة ولها توزيع واحد.

$$T_r = (X_{n+1} + \dots + X_{n+r})^2 = (X_{n+1}^2 + \dots + X_{n+r}^2) + 2(X_{n+1}X_{n+2} + \dots + X_{n+1}X_{n+r} + \dots + X_{n+r-1}X_{n+r})$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 + 2\mu(X_{n+1} + \dots + X_{n+r}) = \sigma^2 + \mu^2 + 2\mu T_r$$

حيث إن: $\mu = T_r$

ولكي تحقق المساواة $\sigma^2 = T_r$ يجب أن يكون $\mu = \sigma^2$ ، وهذا يعني عدم وجود أخطاء نظامية، وبالتالي حسب المبرهنة (٢.٤.١) فالعلاقة (١) محققة.

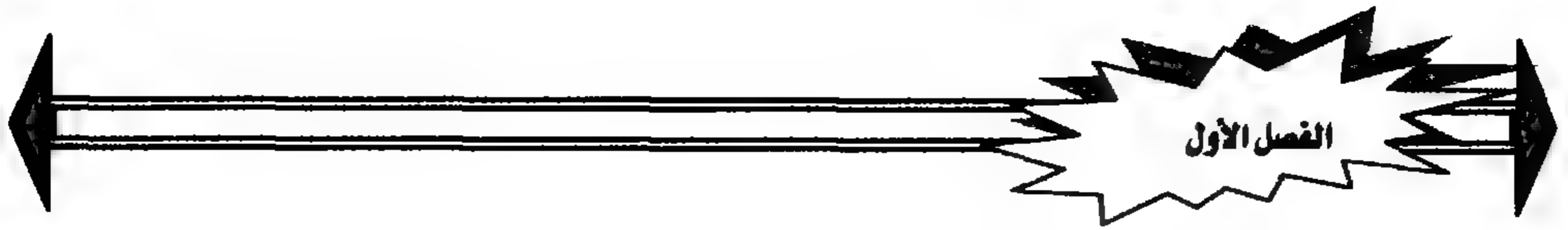
تبين مبرهنة تشيبيشيف أن المتوسط الحسابي لعدد كبير من المتغيرات العشوائية المستقلة ذات تباينات منتهية ومحدودة بعدد ثابت يفقد صفة العشوائية، أي يقترب بالاحتمال من مقدار ثابت.

(٢.٤.١) صيغة برنولي لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف

مبرهنة (٢.٤.١): مبرهنة برنولي Bernoulli's Theorem

إذا كان X متغيراً عشوائياً يساوي عدد مرات ظهور حادث A في n تكراراً





مستقلاً لتجربة عشوائية، و ح احتمال ظهور الحادث أ في كل تكرار، فإن:

$$(1.4.5) \text{ نها ح } = \left(\epsilon > \left| \bar{ح} - \frac{س}{ن} \right| \right) = \epsilon < 1$$

الإثبات: يمكن اعتبار س متغير عشوائي مؤلف من مجموع ن متغيراً عشوائياً:

$$س = \sum_{r=1}^n س_r$$

حيث $س_r$ متغير عشوائي يساوي عدد مرات وقوع الحادث أ في التكرار ر، أي يفترض القيمتين ١، ٠ باحتمال ح و $\bar{ح} = ١ - ح$ على الترتيب.

$$ت (س_r) = ح، \text{ تباين } (س_r) = \bar{ح} ح \geq \frac{1}{4}، ر = ١، ٢، \dots، ن.$$

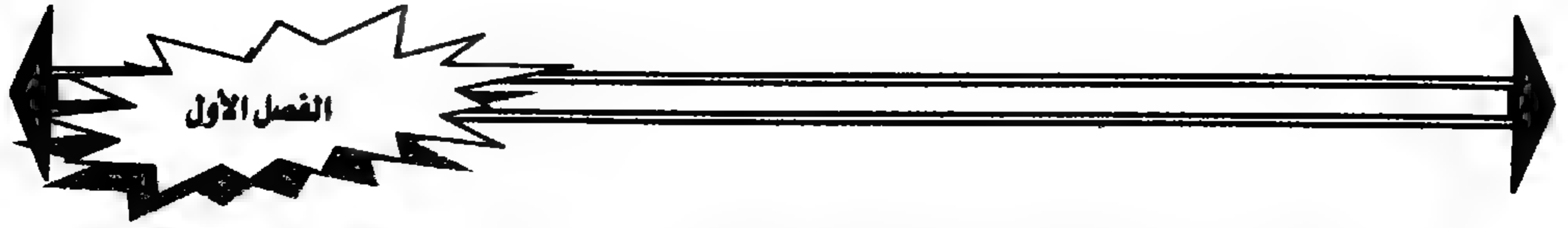
فبتطبيق مبرهنة (1.4.1) نجد:

$$1 = \left(\epsilon > \left| \bar{ح} - \frac{س}{ن} \right| \right) \underset{ن \rightarrow \infty}{\text{نها ح}} = \left(\epsilon > \left| \sum_{r=1}^n \frac{1}{ن} ت (س_r) - \sum_{r=1}^n \frac{1}{ن} ح \right| \right) \underset{ن \rightarrow \infty}{\text{نها ح}}$$

عندما تكون ن كبيرة بكفاية، فإن التكرار النسبي $W(1) = \frac{س}{ن}$ يكون قريباً جداً من القيمة ح (يفقد صفة العشوائية). وتكمن الأهمية التطبيقية لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف بصيغة برنولي في أنه يعتبر أساس الطريقة الإحصائية لتقدير الاحتمالات.

تجدر الإشارة، إلى أن مبرهنة برنولي أهم صيغة، وأسبق تاريخياً، لقانون الأعداد الكبيرة، وهي تصوغ العلاقة بين التكرار النسبي لوقوع حادث واحتماله. وبرهانها كان صعباً، إلى أن جاء العالم تشيبيشيف وقدم الإثبات الوارد أعلاه.





٣.٤.١ صيغة بواسون لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف

مبرهنة ٣.٤.١: مبرهنة بواسون Poisson's Theorem

إذا كان في متتالية من التكرارات المستقلة، احتمال وقوع حادث أ في التكرار رقم ر يساوي ح، فإن:

$$(٦.٤.١) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \left(\left| \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} - \frac{s}{n} \right| < \epsilon \right) = 1$$

حيث أن س عدد مرات ظهور الحادث أ في التكرارات الـ ن الأولى.

الإثبات:

$$\text{لدينا: } s = \sum_{r=1}^n s_r, \quad s_r = (s_r) = \text{تباين } (s_r) = \bar{s}_r \geq \frac{1}{4}$$

حيث $r = 1, 2, \dots, s$ عدد مرات ظهور الحادث أ في التكرار رقم ر.

بتطبيق مبرهنة تشيبيشيف (١.٤.١) نحصل على المطلوب.

(٤.٤.١) صيغة ماركوف لقانون الأعداد الكبيرة الضعيف

مبرهنة (٤.٤.١) مبرهنة ماركوف Markon's Theorem

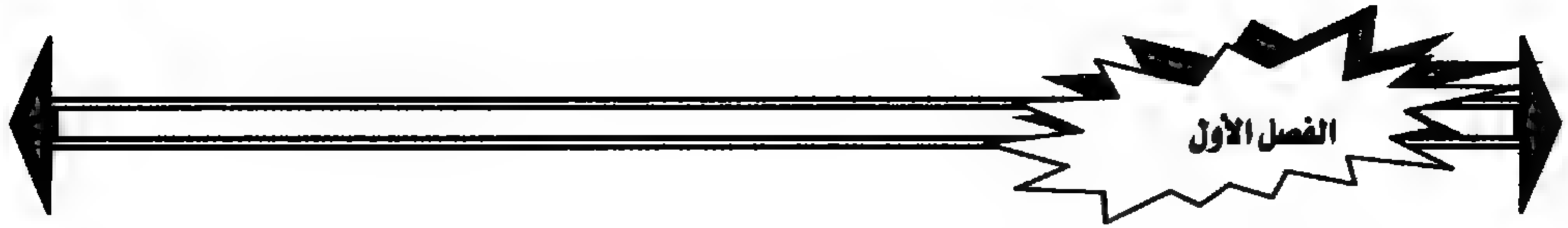
إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية $\{s_n\}$ ، وكان:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \left(\sum_{r=1}^n \frac{1}{n} \right) = 0$$

$$\text{فإن: (٧.٤.١)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \left(\left| \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} - s_r \right| < \epsilon \right) = 1$$

يمكن إثبات صحة هذه المبرهنة بسهولة تطبيق مبرهنة تشيبيشيف، وكحالة





خاصة إذا كانت المتغيرات العشوائية s_1, s_2, \dots, s_n مستقلة مثني مثني فإن شرط ماركوف يكتب على الصورة:

$$0 = \left(\sum_{r=1}^n \frac{1}{n} \right) \text{نها} \text{تباين } s_r$$

نلاحظ أن مبرهنة تشيبيشيف (١.٤.١) حالة خاصة من مبرهنة ماركوف.

١.٥ قانون الأعداد الكبيرة القوي

The Strong Law of Large numbers

رأينا في البند (١.٤) أن قانون الأعداد الكبيرة الضعيف، تحت شروط معينة، يبين أن متوسط متتالية المتغيرات العشوائية المستقلة تتقارب بالاحتمال من متوسط القيم المتوقعة لها. والسؤال الذي يطرح نفسه الآن: هل يمكن تقديم عبارة احتمالية حول متتالية المتوسطات.

$\left\{ \overline{s}_n, \overline{s}_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} s_r, n=1, 2, \dots \right\}$ والجواب يعطى بقانون الأعداد الكبيرة القوي.

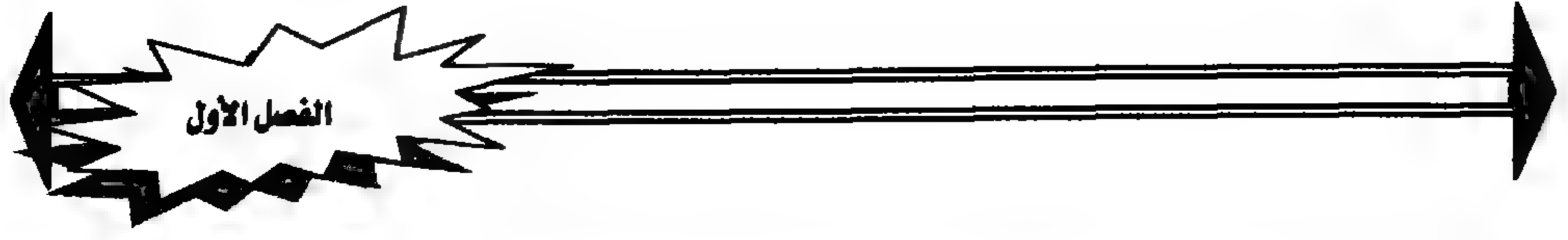
تعريف (١.٥.١):

نقول عن متتالية المتغيرات العشوائية $\{s_r\}$ بأنها تخضع لقانون الأعداد الكبيرة القوي إذا كان مهما يكن $\epsilon > 0$ ، و $\delta > 0$ ، يمكن إيجاد عدد صحيح موجب N ، بحيث يتحقق الشرط:

$$(1.5.1) \text{ ح } \left(\left| \overline{s}_n - \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} s_r \right| > \epsilon, n = N, N+1, \dots, N+k \right) \leq \delta$$

من أجل كل قيم $N \leq n$ وكل قيم k .





متباينة كالماغوروف: Kalmagoron Inequality

إذا كانت s_1, s_2, \dots, s_n متغيرات عشوائية مستقلة وذات تباينات متتالية $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ ولنفترض $\sum_{j=1}^n \sigma_j^2 = \sigma^2$ و $\mu = (s_r)$ فإن:

$$(1.5.2) \quad P\left(\left|\sum_{j=1}^n s_j - \mu\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

مبرهنة (1.5.1) مبرهنة كالماغوروف Kalmagoron Theorem

إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية $\{s_n\}$ مستقلة متنى ومتحقق الشرط:

$$(1.5.3) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$$

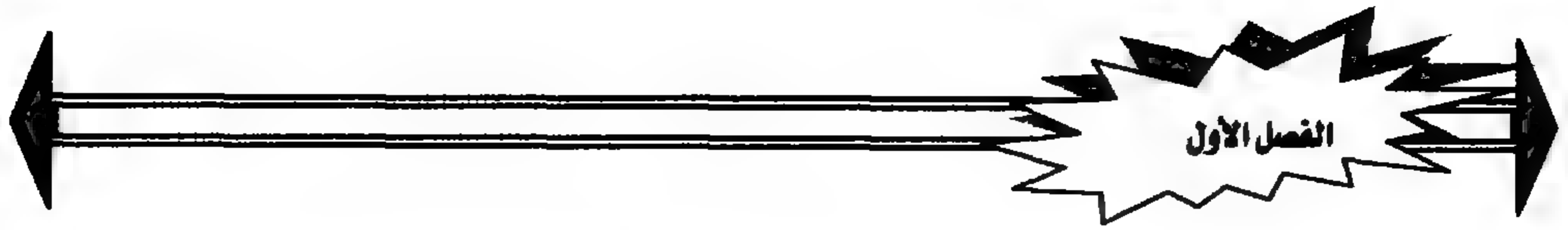
فإنها تخضع لقانون الأعداد الكبيرة القوي.

وبناءً على ذلك، إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية $\{s_n\}$ مستقلة متنى ومتحقق الشرط، فإنها تخضع لقانون الأعداد الكبيرة القوي.

إحدى النتائج الهامة المتعلقة بقانون الأعداد الكبيرة القوي توصل إليها العالم كالماغوروف وهي:

إذا كانت $\{s_n\}$ متتالية مع المتغيرات العشوائية المستقلة متنى ولها نفس التوزيع، فإن الشرط اللازم والكافي لكي تخضع هذه المتتالية لقانون الأعداد الكبيرة القوي يتمثل في وجود القيمة المتوقعة $\mu = (s_r)$.





(٦.١) مبرهنات النهاية المركزية Central Limit Theorems

تطرقنا في البندين السابقين لمسائل تقارب بعض المتغيرات العشوائية إلى نهاية معينة، بغض النظر عن توزيعاتها الاحتمالية، ورأينا أن المعرفة المطلوبة للمتغيرات العشوائية موضوع الدراسة لا تتعدى قيمتها المتوقعة وتبايناتها.

توجد مجموعة أخرى من المبرهنات في نظرية الاحتمالات تخص التوزيع الاحتمالي الذي ينتهي إليه توزيع المتغير العشوائي $\sum_{r=1}^n S_r$ عندما $n \rightarrow \infty$.

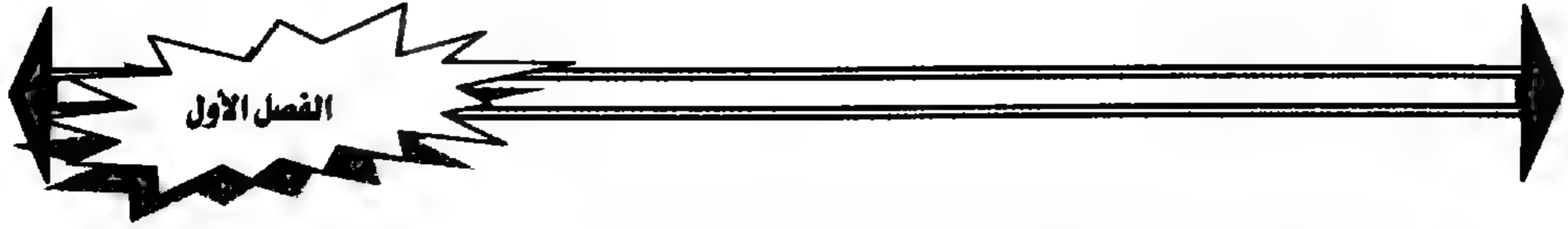
وهذه المجموعة من المبرهنات هامة جداً في الإحصاء، وتحمل اسماً عاماً "مبرهنات النهاية المركزية" وهي تبين الشروط العامة المفروضة على المتغيرات العشوائية S_1, S_2, \dots, S_n لكي يؤول مجموعها $\sum_{r=1}^n S_r$ إلى التوزيع الطبيعي عندما $n \rightarrow \infty$.

لتكن $\{S_r\}$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة، ولنرمز بـ تباين $S_r = \sigma_r^2$ ، $r=1, 2, \dots$ وت $m = (S_r)$ للقيمة المتوقعة والتباين لـ S_1 على الترتيب. وكذلك بـ تباين $\sum_{r=1}^n S_r = \sigma_n^2$ وت $m = (S_n)$ للقيمة المتوقعة والتباين لـ $\sum_{r=1}^n S_r$.

وعندئذ يمكن التعبير عن المحتوى العام لمبرهنات النهاية المركزية بالآتي:

بغض النظر عن توزيعات المتغيرات العشوائية S_1, S_2, \dots, S_n فإن توزيع مجموعها $\sum_{r=1}^n S_r$ تحت شروط معينة مفروضة على المتغيرات العشوائية S_r ، ينتهي إلى التوزيع الطبيعي (μ_n, σ_n^2) عندما $n \rightarrow \infty$.





(١.٦.١) مبرهنة النهاية المركزية بصيغة ليابونوف

Liaponof Central Limit Theorem.

إذا كانت $\{s_n\}$ رمتالية من المتغيرات العشوائية تحقق الشروط الآتية:

١. القيم المتوقعة $r=1, 2, \dots$ ت $\mu_r = (s_r)$ موجودة
٢. التباينات $r=1, 2, \dots$ تباين $\sigma_r^2 = (s_r)$ موجودة
٣. العزوم المركزية المطلقة من المرتبة الثالثة ت $(|s_r - \mu_r|^3)$ موجودة

$$(1.6.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{r=1}^n |s_r - \mu_r|^3 \right)}{\left(\sum_{r=1}^n \sigma_r^2 \right)^{3/2}} = 0$$

فإن توزيع المجموع $s_n = \sum_{r=1}^n s_r$ ينتهي إلى التوزيع الطبيعي (μ_n, σ_n^2) .

عندما $n \rightarrow \infty$. وهذا يعني عندما تكون n كبيرة بكفاية فإن التوزيع التقريبي لـ s_n هو التوزيع الطبيعي (μ_n, σ_n^2) .

نلاحظ من شرط ليابونوف (١.٦.١) أن:

$$(2.6.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n^3}{\left(\sum_{r=1}^n \sigma_r^2 \right)^{3/2}} = 0$$

وهذا يعني أن تباين كل متغير عشوائي s_r يدخل في تشكيل المتغير العشوائي $s_n = \sum_{r=1}^n s_r$ يمثل نسبة صغيرة من تباين s_n . وبعبارة أخرى،





بغض النظر عن اختلاف تباينات المتغيرات العشوائية s_r ، فإن هذه التباينات يجب أن لا تختلف عن بعضها بشكل كبير، من حيث تأثيرها على تباين المتغير العشوائي s_r وعندئذ يقال: لا يسود في المجموع s_r أي متغير من المتغيرات العشوائية s_r .

وإذا رمزنا بـ $Z = \frac{s_r - \mu_{s_r}}{\sigma_{s_r}}$ فإن Z يخضع تقريباً للتوزيع الطبيعي المعياري، عندما تكون كبيرة.

إثبات مبرهنة ليابونوف معقد، ولا مجال لذكره هنا، لذا سنقبل هذه المبرهنة دون إثبات. وسنكتفي بإثباتها في حالة خاصة كافية من أجل معظم القضايا التي نحتاجها، بالإضافة إلى أنها كافية لمعظم التطبيقات الإحصائية.

إذا كانت $\{s_r\}$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة محققة للشروط الآتية:

١. تخضع لتوزيع احتمالي واحد.

٢. القيم المتوقعة $(s_r) = \mu_r$ ، $r = 1, 2, \dots$ موجودة

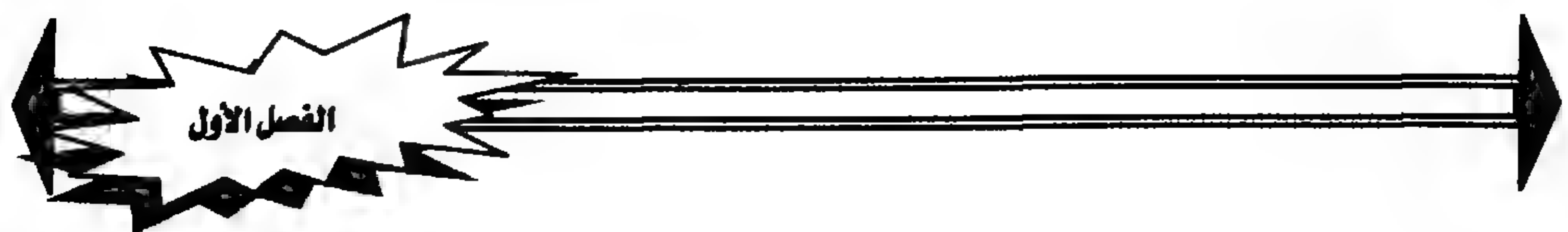
٣. التباينات $s_r = \sigma_r^2$ ، $r = 1, 2, \dots$ موجودة

فإن توزيع المتغير العشوائي: $Z = \frac{s_r - \mu_{s_r}}{\sigma_{s_r}}$ ؛ $s_r = \sum_{r=1}^n s_r$ يتقارب إلى التوزيع الطبيعي المعياري $(0, 1)$ عندما $n \rightarrow \infty$.

الإثبات:

بما أن المتغيرات العشوائية s_r ، $r = 1, 2, \dots$ مستقلة (حسب الفرض) فإن المتغيرات العشوائية $(s_r - \mu_r)$ ، $r = 1, 2, \dots$ مستقلة بدورها أيضاً.





لنرمز بـ $r = 1, 2, \dots$ ؛ $\phi_r(z)$ للدالة المميزة للمتغير العشوائي (س) r -
 m و $\phi_r(z)$ للدالة المميزة للمتغير العشوائي Z_n ، ولتكن $Q_n(s)$ دالة توزيع
 Z_n .

بناءً على خواص الدالة المميزة، فإن الدالة المميزة للمتغير العشوائي

$\frac{s_n - \mu_r}{\sqrt{n}\sigma}$ ولنرمز لها بـ $\phi_r^*(z)$ حيث:

$$\phi_r^*(z) = \left(\frac{z}{\sqrt{n}\sigma} \right)^r \phi_r(z) ; r = 1, 2, \dots$$

$$\phi_n^*(z) = \left[\left(\frac{z}{\sqrt{n}\sigma} \right)^r \phi_r(z) \right] \quad \text{ومن ثم:}$$

وحيث إن العزمين المركزين الأول والثاني هما 0 ، و σ^2 على الترتيب

فإن:

$$\phi_r(z) = 1 - \frac{1}{r} \sigma^2 z^2 + o(z^2)$$

$$\text{وباستبدال } z \text{ بـ } \frac{z}{\sqrt{n}\sigma} \text{ نجد أن: } \phi_r\left(\frac{z}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 - \frac{z^2}{n\sigma^2} +$$

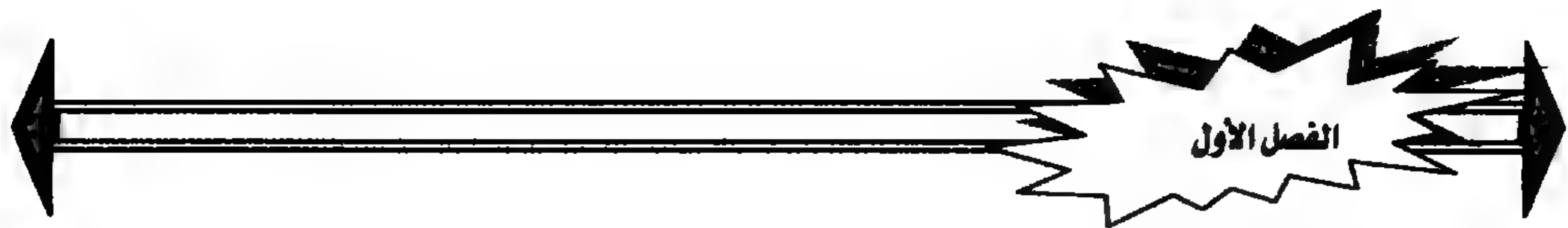
$$\frac{R(n, z)}{n}$$

حيث إن: $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n, z) = 0$ وذلك من أجل z ثابتة، وبالتالي:

$$\phi_n^*(z) = \left[\frac{R(n, z)}{n} + \frac{z^2}{n\sigma^2} - 1 \right] \quad \text{وبأخذ نهاية الطرفين عندما } n \rightarrow \infty$$

نجد:





نها $\phi_n(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2}$ وهذه ما هي إلا الدالة المميزة للتوزيع الطبيعي

$$\text{المعياري (1, 0) أي أن } \phi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} = (Z) \phi$$

وهذا يعني عندما تكون n كبيرة فإن:

$$\phi_n(z) \approx \phi(z) \quad \text{لـ } -\infty < z < +\infty$$

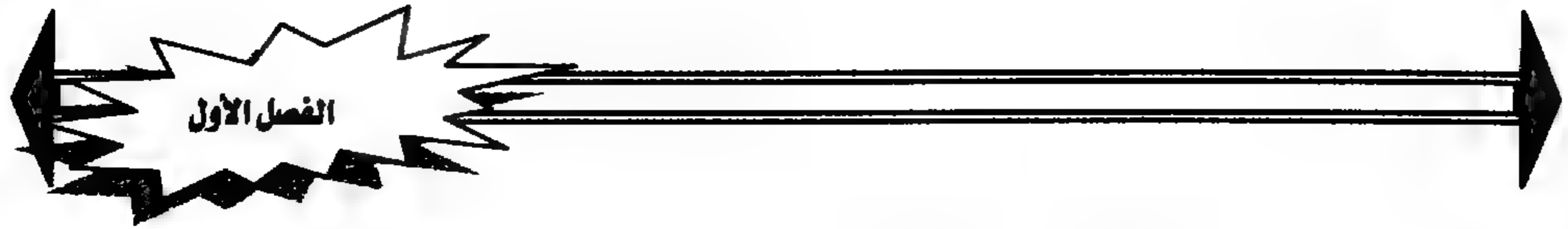
ومن ثم فإن التوزيع التقريبي لـ $\sum_{r=1}^n s_r$ عندما تكون n كبيرة، هو التوزيع الطبيعي (n, μ, σ^2) .

فمثلاً، عند قياس مقدار فيزيائي ما μ ، نتائج القياس تمثل متغيراً عشوائياً ϵ ، وتكرار قياس المقدار μ ، تحت نفس الشروط، نحصل على متتالية $\{s_r\}$ من المتغيرات العشوائية المستقلة إذا كانت القياسات لا تتضمن أخطاء نظامية، فإن القيمة المتوقعة لـ s_r ، $r=1, 2, \dots$ هي عبارة عن القيمة الحقيقية لقياس المقدار μ ، أي أن $t(s_r) = \mu$ ، وعندئذ تباينات المتغيرات s_r تصف دقة القياسات، وبما أننا لا نميز بين القياسات (لا نعتبر أي قياس هو الأساس)، فإن شروط مبرهنة النهاية المركزية محققة، لذا فالوسط الحسابي للقياسات المأخوذة للمقدار μ هو متغير عشوائي، وتوزيع يقرب من التوزيع الطبيعي بازدياد عدد القياسات.

(٢.٦.١) مبرهنة النهاية المركزية بصيغة موافر ولا بلاس

أشرنا عند دراسة مبرهنة ليابونوف إلى أن المتغيرات العشوائية s_r ، $r=1, 2, \dots$ ، نالداخلة في تشكيل المجموع $\sum_{r=1}^n s_r$ ، تخضع لتوزيع احتمالي واحد، لكن لم نحدد نوع التوزيع (طبيعي، ذي الحدين، بواسون...) أي يمكن أن





تخضع لأي توزيع احتمالي. إذا افترضنا أنها تتبع توزيع برنولي لمعلمة h ، فما هو التوزيع المقارب للمجموع $\sum_{r=1}^n s_r$ ، وبعبارة أخرى، ما هو التوزيع المقارب لتوزيع ذي الحدين؟

هذا ما تجيب عليه مبرهنة موافر ولا بلاس:

مبرهنة موافر ولا بلاس Laplace – Moivre Theorem

إذا كانت متتالية المتغيرات العشوائية $\{s_n\}$ مستقلة ولكل منها توزيع برنولي $(1, h)$ فإن توزيع المجموع $\sum_{r=1}^n s_r$ يتقارب من التوزيع الطبيعي (n, nh) بازدياد n أي أن:

نها توزيع ذو الحدين $(n, nh) =$ التوزيع الطبيعي (n, nh) .

الإثبات:

كما نعلم $h = (s_r = 1) = s_r$ ، $1 - h = (s_r = 0)$ ، $h \geq 1/4$

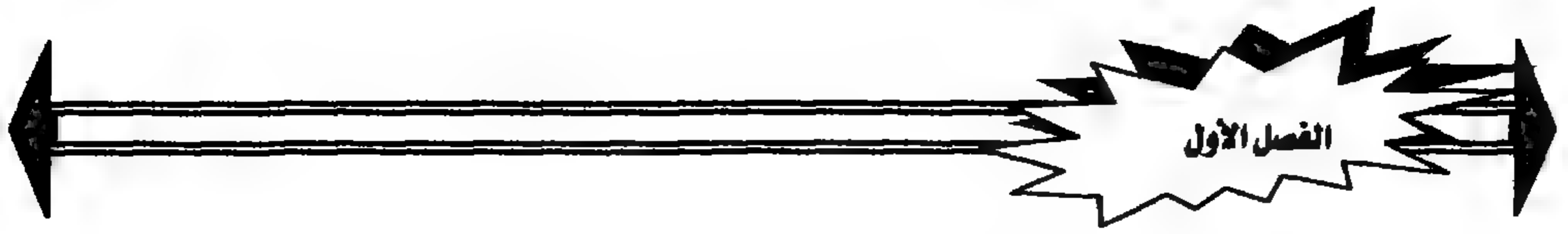
$$t = (s_r) = \sum_{r=1}^n s_r h = nh$$

تباين $s_r = t - (s_r)^2 = t - (nh)^2 = nh - (nh)^2 = nh(1 - h) \geq nh/4$ ، $r = 1, 2, \dots$

أي أن شروط ليابونوف (في صيغتها المبسطة) محققة، ومن ثم التوزيع

ص $\sum_{r=1}^n s_r$ ينتهي إلى التوزيع الطبيعي (n, nh) .

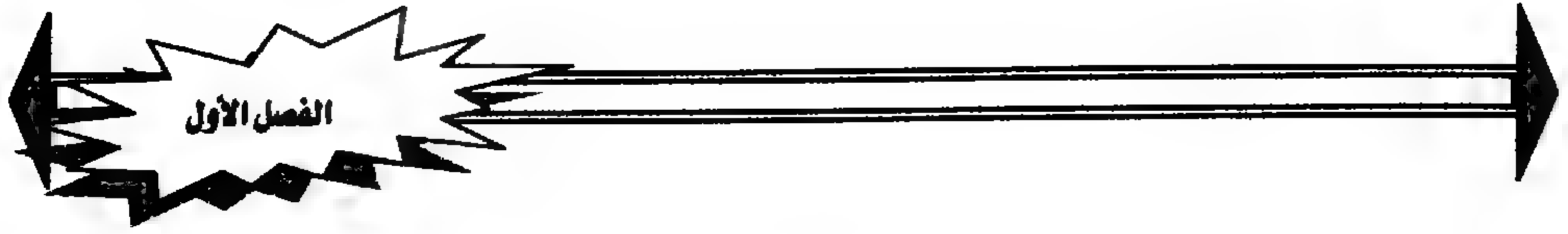




لكن صـ يتبع توزيع ذي الحدين (ن، ح) وبالتالي:

نـها توزيع ذو الحدين (ن، ح) = التوزيع الطبيعي (ن، ح، ن ح حـ).
وعندما تكون ن كبيرة فإن: توزيع ذو الحدين (ن، ح) \approx التوزيع الطبيعي
(ن، ح، ن ح حـ).





تمارين

١. كم مرة يجب رمي قطعة نقود متجانسة حتى يكون ح $(0,4) > \frac{m}{n} > 0,6$

٢. يرغب باحث علمي تقدير متوسط مجتمع مستخدماً عينة عشوائية حجمها كاف للقول بأن احتمال ألا يتجاوز الفرق بين متوسط العينة ومتوسط المجتمع ٢٥٪ من الانحراف المعياري هو ٠,٥٩ فما هو حجم العينة المطلوب؟

٣. س متغير عشوائي توقعه الرياضي ت (س) = ١ والانحراف المعياري $\sigma = ٢,٠$
قدر الحد الأدنى لاحتمالات الحوادث:

$$أ = \{ ٠,٥ \leq س < ١,٥ \} \quad ب = \{ ٠,٧٥ \leq س \leq ١,٣٥ \}$$

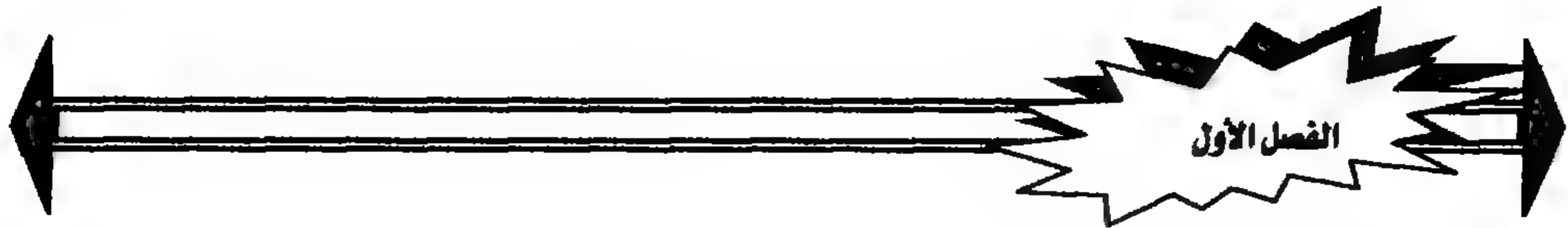
$$ج = \{ س > ٢ \}$$

٤. س متغير عشوائي يساوي عدد الأيام المشمسة من السنة في منطقة معينة.
إذا علمت بأن ت (س) = ١٠٠ يوم، و $\sigma = ٢٠$ ، قدر احتمال كل من الحادتين:

$$أ = \{ س \leq ١٥٠ \} \quad ب = \{ س \leq ٢٠٠ \}$$

٥. كم مرة يجب رمي قطعة نقود متجانسة للحصول على تكرار نسبي لظهور الصورة يقع في المجال $[0,4, 0,6]$ وذلك باحتمال لا يقل عن ٠,٩٧٥؟





٦. في استفتاء للرأي العام حول قضية ما، نريد أن يكون حجم العينة بحيث يكون الاحتمال ١٪ فقط أن نحصل على نسبة تأييد للقضية المطروحة على الاستفتاء أقل من ٥٠٪ في حين أن حقيقة هذه النسبة ٥٢٪، فكم يجب أن يكون حجم العينة؟

٧. هل يمكن تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على متتالية المتغيرات العشوائية المستقلة متنى متنى s_1, s_2, \dots في كل من الحالات الآتية:

$$(أ) \text{ ح (س ك} = \pm ٢^ك) = ٢ - (١ + ٢^ك) \text{ ، ح (س ك} = ٠) = ١ - ٢ - ٢^ك$$

$$(ب) \text{ ح (س ك} = \pm ٢^ك) = \frac{١}{٢^ك} \text{ ، ح (س ك} = ٠) = ١ - \frac{١}{٢^ك}$$

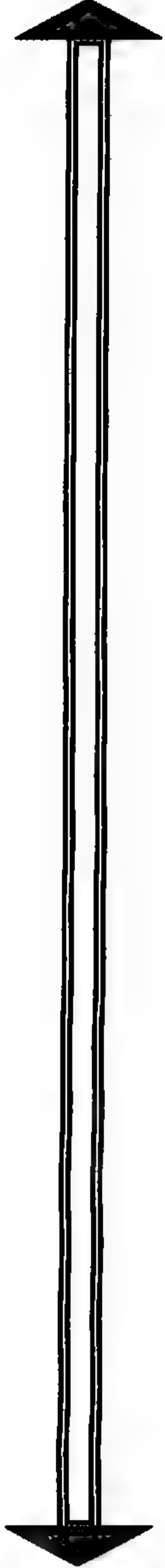
$$(ج) \text{ ح (س ك} = \pm ٢^ك) = \frac{١}{٢^ك} \text{ ، ح (س ك} = ٠) = ١ - \frac{١}{٢^{١-ك}}$$

$$(د) \text{ ح (س ك} = ٢) = \frac{ك}{١ + ٢^ك} \text{ ، ح (س ك} = ١ - ٢) = \frac{١ + ك}{١ + ٢^ك}$$

٨. في إحدى المدارس الابتدائية، يجب استقبال ٢٠٠ طفل وطفلة في السنة الأولى، أوجد احتمال أن يكون من بينهم ١٠٠ طفلة إذا علمت بأن احتمال ولادة ذكر يساوي ٠,٥١٥.

٩. ليكن لدينا ٦٢٥ تكراراً مستقلاً لتجربة مفروضة، إذا علمت بأن احتمال ظهور الحادث أ في كل تكرار ثابت ويساوي ٠,٨، فأوجد احتمال أن يكون انحراف التكرار النسبي لظهور الحادث أ عن احتمال ثابت، بالقيمة المطلقة لا يزيد عن ٠,٠٦.





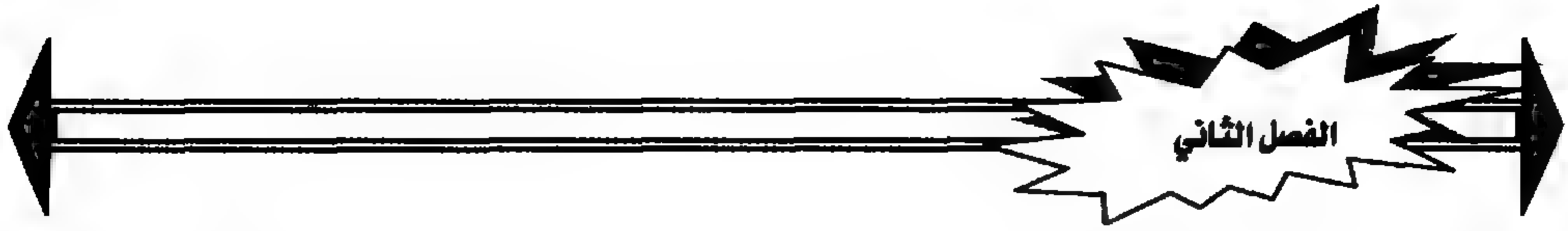
المعادلات التفاضلية

الفصل الثاني

١.١ المعادلات التفاضلية:

كثير من القوانين في العلوم الفيزيائية، وحديثاً صار كثير من قوانين العلوم البيولوجية والاجتماعية يصاغ بدلالة علاقات رياضية تحتوي على كميات معلومة وأخرى مجهولة، وعلى مشتقاتها التفاضلية مثل هذه العلاقة تسمى معادلات تفاضلية.

وفي البند التالي سنرى كيف تصنف الأنماط المختلفة من المعادلات التفاضلية وفي الفصول التالية سنبحث في طرق حلها، أو حيث يتعذر الحل، في طرق تعطينا معلومات عن الحلول، (إذا وجدت)، الأصناف شتى من المعادلات. وفي هذا البند سنرى كيف تنشأ بعض المعادلات التفاضلية البسيطة ولكن قبل أن نأتي إلى الأسئلة، نؤكد أن المشكلة الكبرى في دراسة المعادلات التفاضلية هي على الغالب تصف موقفاً حقيقياً وصفاً كمياً ويلزم لذلك عادة تبسيط الأمر، بافتراضات يسهل التعبير عنها رياضياً. فمثلاً كي نصف حركة جسم ما في الفضاء. نبدأ أولاً باعتباره كتلة مجتمعة في نقطة وثانياً بفرض أن ليس هناك احتكاك ولا مقاومة هواء. فهذه الافتراضات ليست واقعية، ولكن العلماء يلمحون معلومات قيمة من نماذج معرفة في المثالية، فإذا فهمت هذه المعلومات أمكن بعدئذ تعديل النماذج بأخذ الأمور الأخرى بعين الاعتبار.



المثال (١-١-١): سقطت كرة من أعلى بناء ارتفاعه ١, ٤٤ متر (المتر = ٢٨, ٣ قدم) فمتى تصطدم الكرة بالأرض؟

نعتبر أن الكرة نقطة كتلة وأن ليس هنالك مقاومة هواء، فيكون تسارع الكرة هو ما ينشأ عن قوة الجاذبية وحدها. فإذا رمزنا إلى ارتفاع الكرة في أي لحظة n بالرمز $E(n)$ تكون $E(n)$ هي سرعة الكرة في اللحظة n ، لأن السرعة هي معدل تغير الارتفاع بتغير الزمن، وكذلك يكون $E'(n)$ هو تسارع الكرة إلى أعلى في اللحظة n ، لأن التسارع هو معدل تغير السرعة بتغير الزمن.

ولقد وجدنا بالتجربة أن تسارع الجاذبية g يعادل بالتقريب ٩٨٠ سم/ث^٢ أي ٩٨٠ سم/ثانية وكل ثانية (= ٣٢, ٢ قدم/ث^٢) على سطح الأرض.

فتسارع الكرة إذن ثابت. فيكون:

$$E'(n) = -980 \dots\dots\dots (1-1)$$

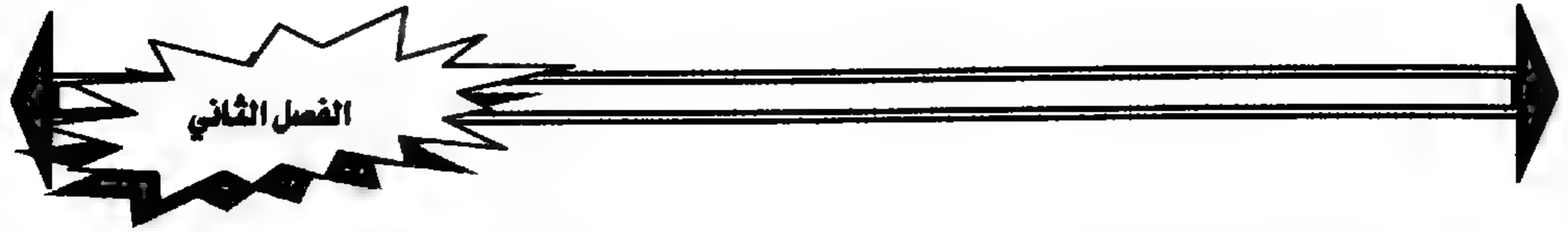
حيث تشير العلاقة السالبة إلى أن قوة الجاذبية تعمل إلى أسفل. ونكامل طرفي المعادلة (١-١) بالنسبة إلى n فيكون: $E(n) = -980n + C$.. (٢-١).

حيث C ثابت يجب تعيينه، ولتعيينه نجعل $n = 0$ في المعادلة (٢-١) فيكون $C = E(0)$ لأن السرعة الابتدائية للكرة صفر إذ أنها سقطت من السكون. ثم نكامل (٢-١) فينتج:

$$E(n) = -490n^2 + C_1 \dots\dots\dots (3-1)$$

والثابت C_1 يمكن أيضاً تعيينه باتخاذ $n = 0$ فيكون $C_1 = E(0) = 4410$,





وهذا هو الارتفاع البدائي (بالستمرات). ولكي نعرف الوقت الذي يمضي قبل أن تصطدم الكرة بالأرض، نجعل الطرف الأيمن في المعادلة (١-٣) صفراً، ثم نجد قيمة n ، فيكون:

$$490 = n^2 \text{ أي أن } n^2 = 490$$

فيكون $n = \pm 3$ ولأن -3 ليس لها، فيزيائياً، معنى، يكون $n = 3$ ثواني.

المثال (١-١-٢):

ينص قانون نيوتن في التبريد على أن سرعة تغير الفرق في درجتي الحرارة لدى الجسم والوسط الذي يحيط به تتناسب مع هذا الفرق. فليكن $\Delta(n)$ يرمز إلى الفرق بين درجتي الحرارة في اللحظة n . فلأن سرعة التغير يعبر عنها رياضياً بمشتقة تفاضلية، يمكن أن نعبر عن قانون التبريد بالصيغة:

$$\frac{\Delta n}{\Delta n} = \Delta n, \dots \dots \dots (١-٤)$$

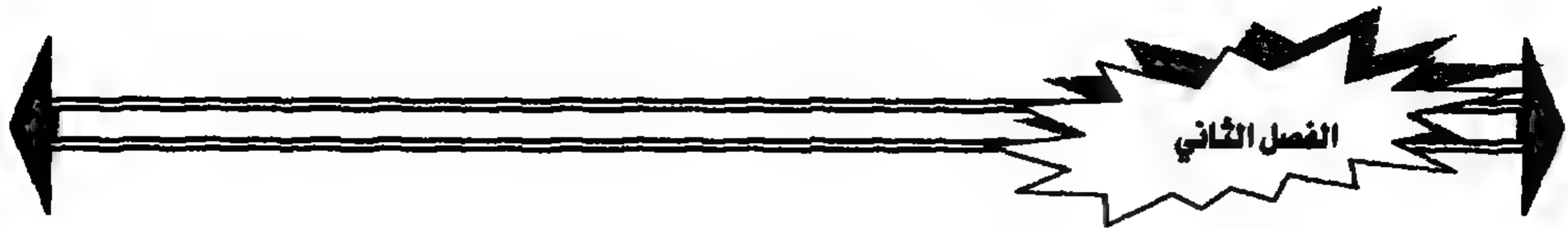
حيث K هو ثابت التناسب، فإذا تذكرنا من دروس مبادئ التفاضل أن:

$$(\Delta n)^{-1} = K(\Delta n), \text{ نحصل على الحل:}$$

$$\Delta(n) = \Delta n \cdot \Delta n \dots \dots \dots (١-٥)$$

حيث Δ ثابت، وهذا هو حل المعادلة التفاضلية (١-٤). وللتحقق من ذلك تعوض (١-٥) في (١-٤)، ونفاضل فينتج: $(\Delta n \cdot \Delta n)^{-1} = K \cdot \Delta n \cdot \Delta n$ ذلك تعوض (١-٥) في (١-٤)، ونفاضل فينتج: $(\Delta n \cdot \Delta n)^{-1} = K \cdot \Delta n \cdot \Delta n$ $= K(\Delta n \cdot \Delta n)$ فإذا جعلنا $n = 0$ في (١-٥)، يتج أن: $\Delta(0) = \Delta$ ، أي أن Δ هي الفرق الابتدائي بين درجة حرارة الجسم والوسط المحيط به.





ولأن فرق درجتي الحرارة Δ (ن) يقارب الصفر بمضي الزمن ينبغي أن يكون الثابت k في المعادلة (١-٥) سالباً.

المثال (١-١-٣):

مزرعة بكتيريا تتغير سعتها (أي عدد سكانها) بسرعة تتناسب مع هذا العدد. فإذا كان E (ن) يرمز إلى عدد السكان في اللحظة n ، فإن المعادلة التي تمثل تزايدها هي:

$$\frac{dE}{dn} = \alpha E, \text{ حيث } \alpha \text{ موجبة أو سالبة حسب كون العدد في تزايد أو في}$$

تناقص فكما في المثال السابق، يكون الحل:

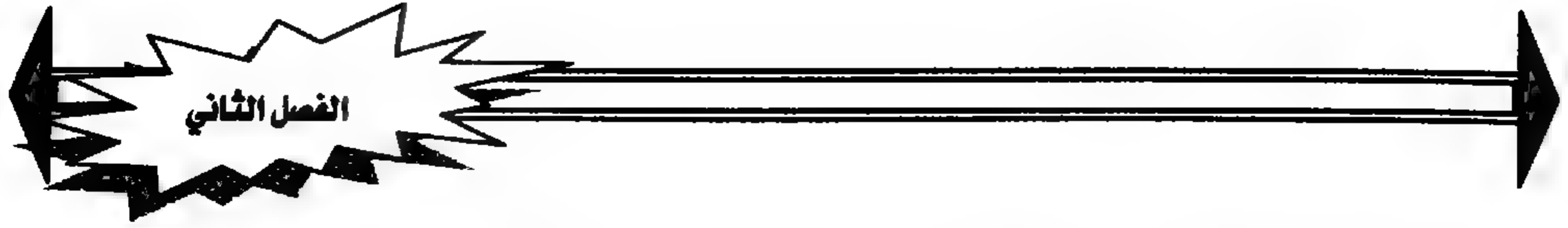
$E(n) = E(0)e^{\alpha n}$ ، حيث $E(0)$ هو عدد السكان ابتداءً، فإذا كانت $\alpha < 0$ يتزايد العدد أسياً، وإذا كانت $\alpha > 0$ يتناقص العدد أسياً أيضاً. وفي الحالة الخاصة $\alpha = 0$ تبقى المزرعة ثابتة السعة. مستقرة على $E(0)$.

المثال (١-١-٤):

يقاس معدل النمو السكاني بالنسبة للفرد الواحد، بالفرق بين متوسط نسبة المواليد ومتوسط نسبة الوفيات. ولنفرض مجتمعاً فيه متوسط نسبة المواليد ثابت موجب B ، ومتوسط نسبة الوفيات يتناسب طردياً مع عدد السكان، وذلك نتيجة للازدحام، وتزايد التنافس على الغذاء، وليكن ثابت هذا التناسب δ ، فإذا كانت سرعة النمو السكاني $\frac{dE}{dn}$ تكون سرعة هذا النمو بالنسبة

$$\text{إلى الفرد الواحد } \frac{1}{E} \frac{dE}{dn}.$$





فالمعادلة التفاضلية التي تعبر عن النمو السكاني هو:

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = B - \delta E$$

فإذا ضربنا طرفي هذه المعادلة في E ينتج أن:

$$\frac{dE}{dt} = E(B - \delta E) \dots (1-6)$$

تسمى هذه المعادلة بالمعادلة الحركية (Logistic Equation)، والنمو الذي يفضى إليه يسمى النمو الحركي (Logistic growth). وفي المثال ١-٢-٣ سنرى أن الحل:

$$E(t) = \frac{B}{\delta \left[1 - \left(\frac{B - E_0}{E_0} \right) e^{-\delta t} \right]} \dots (1-7)$$

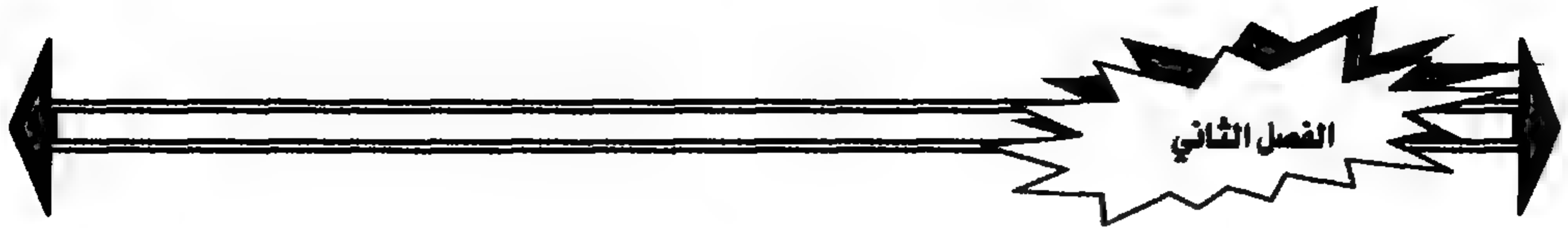
ويلاحظ أنه بزيادة E يقترب الحد $\frac{B}{\delta}$ من الصفر، لأن $B < 0$ ، فعدد السكان يقارب حداً لا يتعداه هو B / δ ، وذلك أنه إذا صارت $E = B / \delta$ لتتج من المعادلة (١-٦) أن $\frac{dE}{dt} = 0$.

المثال (١-١-٥): تحتوي بيئة ما على نوعين من الأحياء:

مفترسات وفرائس، والفرائس لديها صيد من الغذاء لا ينفذ، وليكن $S(t)$ ، $P(t)$ يرمزان إلى عدد المفترسات وعدد الفرائس، في هذه البيئة على الترتيب، فلتوافر الغذاء ينتظر أن تكون نسبة المواليد عند الفرائس ثابتة، في حين أن نسبة الوفيات تعتمد طبعاً على عدد المفترسات.

أما نسبة المواليد في المفترسات فتتأثر بكمية الغذاء الميسور لها، وهي غير





مضمونة في حين أن نسبة الوفيات فيها قد تكون ثابتة. فكما في المثال ١-١-٤

نكتب سرعتي النمو للنوعين كما يلي:

$$\alpha = \frac{1}{\text{ص}} - \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \quad \text{أ- ب ص،} \quad \text{س- B} \dots (٨-١)$$

حيث α ، B، أ، ب، ثوابت تناسب موجبة، لاحظ أن المعادلتين تعتمد كل منهما على الأخرى ولهذا السبب نعتبرهما منظومة واحدة. وهما من المرتبة الأولى. ويمكن حذف أحد المتغيرين: نجد قيمة س من المعادلة الثانية فيكون:

$$\text{س} = \frac{\text{دص} / \text{دن} + \text{B ص}}{\alpha \text{ ص}} \dots (٩-١)$$

وتفاضل (٩-١) فينتج:

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{ص د}^2 / \text{ص}^2 \text{ دن} - (\text{دص} / \text{دن})^2}{\alpha \text{ ص}^2} \dots (١٠-١)$$

فإذا عوضنا هذا في أولى معادلتنا (٨-١)، يتج بعد التبسيط:

$$\text{ص} = \frac{\text{د}^2 \text{ ص}^2}{\text{دن}^2} = \left(\frac{\text{دص}}{\text{دن}} \right)^2 = \text{ص} (\text{أ- ب ص}) (\text{B ص} + \frac{\text{دص}}{\text{دن}}) \dots (١١-١)$$

وليس لدينا حل صريح لمنظومة المقترسات والفرائس، ولكن يمكن أن نستنتج علاقة بين س، ص تكشف عن بعض خصائص الحل. أنظر المثال (٧-١-٤). وسندرس منظومات المعادلات بالتفصيل في الفصل ٧.

التمارين (١-١):

١. حل المعادلات التفاضلية التالية بإيجاد تكامل طرفي المعادلة ثم إيجاد قيمة



ص عند قيمة س المعطاة:

$$(أ) \frac{د ص}{د س} = س + ٣، ص(٠) = ٢$$

$$(ب) \frac{د ص}{د س} = \frac{س^٢}{٥ + س^٢}، ص(١) = ٤$$

$$(ج) \frac{د ص}{د س} = ظا^٢ س، ص(٠) = ١$$

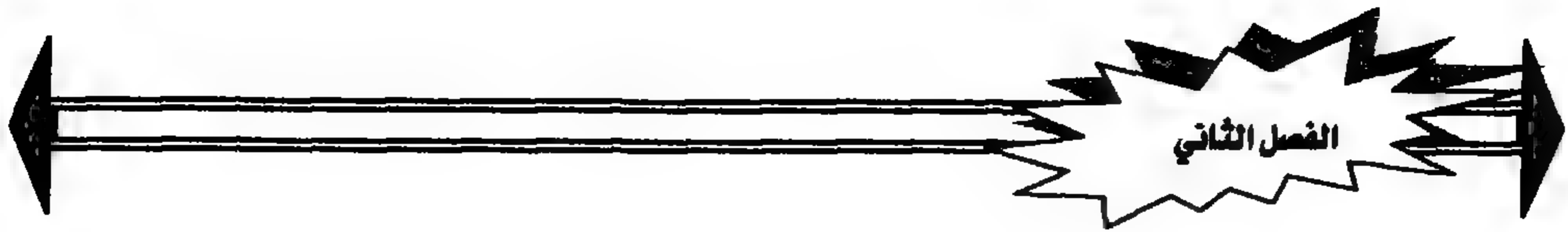
$$(د) \frac{د^٢ ص}{د س^٢} = س^٢ - ٩، ص(٠) = ١، ص(٠) = ٣$$

$$(هـ) \frac{د^٢ ص}{د س^٢} = جا س - جتا س، ص(٢/٣) = ٠، ص(٢/٣) = ١$$

٢. سقط جسم في الفراغ بتسارع ثابت مقداره ج، عبر عن سرعة الجسم بدلالة ارتفاعه.

٣. تأخر متسابق في سباق سيارات فكان عليه أن يقطع $\frac{١}{٢}$ ميل في ٢٠ ثانية فكم يجعل تسارعه؟ وكم القوة التي يبذلها؟ علماً بأن سيارته تزن ٢٠٠٠ باوند؟ [إرشاد: ق = ك ت، و = ك جـ].

٤. يعرف نصف العمر للمادة المشعة بأنه الزمن الذي تستغرق هذه المادة حتى تخسر ٥٠ في المئة من كتلتها. فإذا كانت س (ن) هي كمية المادة المشعة الباقية بعد ن سنوات، وكانت س(٠) = س.، ونصف العمر سنوات، فاكتب معادلة تفاضلية تبين س(ن). متخذاً كل الأمور الجانبية بعين الاعتبار.



٥. أطلق صاروخ من نقطة الابداء (س، ص،) بسرعة ع. وعلى الزاوية θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)، أوجد إحداثيه، الأفقي س، والرأسي ص، بدلالة الزمن. افرض أن ليس هنالك مقاومة هواء وأن قوة الجاذبية ثابتة ج.

٦. وجد أن مزرعة بكتيريا يتضاعف عدد أفرادها مرة كل ٣ ساعات، فإذا كان هذا العدد في البدء ١٠٠، فمتى يصير ١٠,٠٠٠؟.

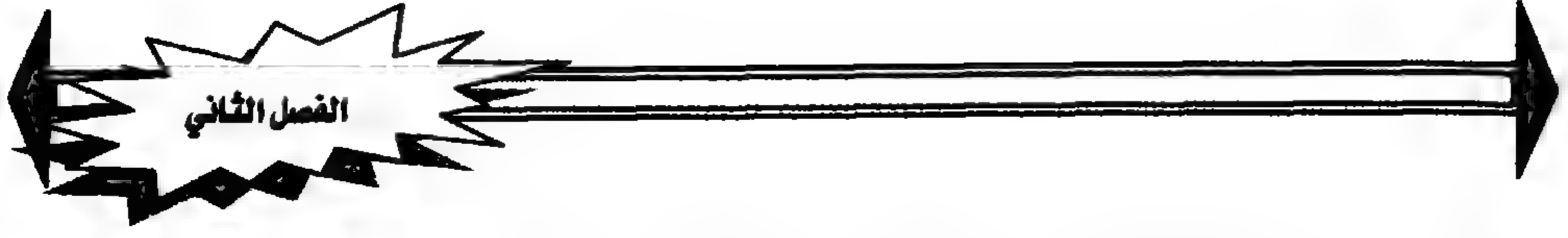
٢-١ تصنيف المعادلات التفاضلية:

يبدو جلياً، من أمثلة البند السابق على الأقل، أن أنواعاً كثيرة من المعادلات التفاضلية تجابهنا في دراستنا للظواهر المألوفة. فمن الضروري إذن، والعاجل، أن ندرس أنواعاً محددة من هذه المعادلات، كلاً على حدة.

وأوضح تصنيف للمعادلات هو الذي يعتمد على طبيعة المشتقات التي تشتمل عليها. فالمعادلة التي تحتوي على مشتقات عادية (مشتقات اقترانات متغير واحد) تسمى معادلة تفاضلية عادية، في حين أن التي تحتوي على مشتقات جزئية تسمى معادلة تفاضلية جزئية. والأمثلة ١-١-١ إلى ٥-١-١ كلها أمثلة على معادلات تفاضلية عادية. ولن نتعرض للمعادلات الجزئية في هذا الكتاب، فمن شاء فليرجع إلى كتابنا المطول.

ولأننا سنقتصر على المعادلات التفاضلية العادية، فنسقط لفظة العادية، ونتكلم عن المعادلات التفاضلية دون نعت، رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة فيها:





المثال (١-٢-١) إليك أمثلة من المعادلات التفاضلية ورتبها:

(أ) $\frac{d^2s}{ds} = 1$ (الرتبة الأولى)..... (١٢-١)

(ب) $s''(n) - 3s'(n) + s(n) = 0$ (الرتبة الثانية)..... (١٣-١)

(ج) $(s')^2 - 2s = 6$ (الرتبة الأولى)..... (١٤-١)

(د) $(s^{(4)})^{1/3} - 2s' = 0$ (الرتبة الرابعة)..... (١٥-١)

في المثال (١-١-٢) حصلنا على المعادلة التفاضلية:

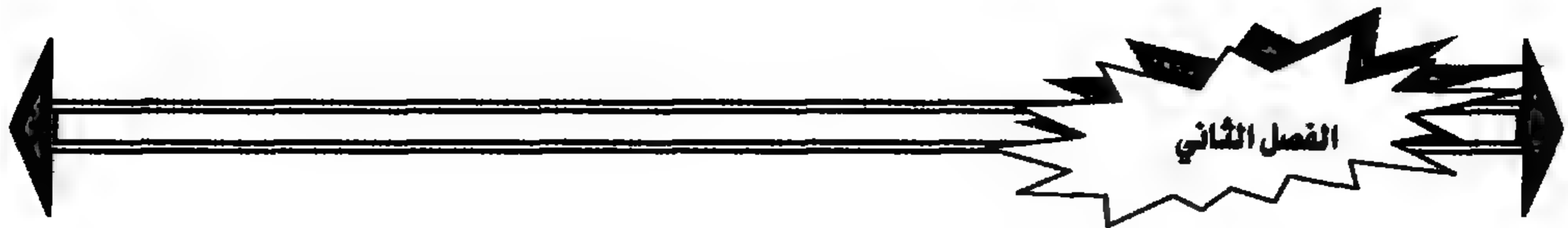
(١٦-١)..... $\Delta = (0) \Delta$ ، $\Delta_k = \frac{\Delta}{\Delta n}$

وقد وجدنا حلاً لها هو $\Delta(n) = \Delta$. هـ..... (١٧-١)

فهذا الحل (وسنرى فيما بعد أنه الحل الوحيد) يعتمد على القيمة الابتدائية للاقتران المجهول $\Delta(n)$. فالمسائل التي من هذا النوع تسمى مسائل قيم ابتدائية. وبوجه عام إن مسألة القيمة الابتدائية هي معادلة تفاضلية تعين فيها قيم الاقتران وبعض مشتقاته عند نقطة ما تسمى نقطة الابتداء، فتعين العدد الابتدائي $s(0)$ ، $s'(0)$ في المثال ١-١-٥ يجعل منظومة المعادلات التفاضلية مسألة قيمة ابتدائية. لاحظ أننا باستعمال هاتين القيمتين في المعادلة الثانية في (١-٨) استطعنا أن نجد قيمة $s'(0)$. وقيمتا $s(0)$ ، $s'(0)$ بالإضافة إلى المعادلة (١-١١) تكون مسألة قيمة ابتدائية من الرتبة الثانية.

ونعرف حل مسألة القيمة الابتدائية ذات الرتبة n بأنه اقتران قابل للمفاضلة n مرات، وتحقيق المعادلة التفاضلية المعطاة والشروط الابتدائية المعطاة.





وفي الملحق ٥ ستثبت أنه في كثير من المسائل، هنالك حل وحيد للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة n إذا أعطي قيمة الاقتران المجهول وقيم كل مشتقاته حتى $(n-1)$ عند نقطة معطاة.

ومن ناحية أخرى، قد لا نعرف عدد الفرائس، ولكن نعرف معلومات مناسبة عن عدد المقترسات، عند نقطتين من الزمن $v(0)$ و $v(1)$. فهاتان القيمتان مع المعادلة (١-١١) تكون مسألة قيم حاصرة. ولكي تكون المعادلة التفاضلية مع قيم للاقتران ومشتقاته مسألة قيم حاصرة، كل ما يلزم هو أن تعطى القيم عند نقطتين مختلفتين على الأقل، ولن نناقش مسائل القيم الحاصرة هنا. ولكن يجدها القارئ في كتابنا المطول.

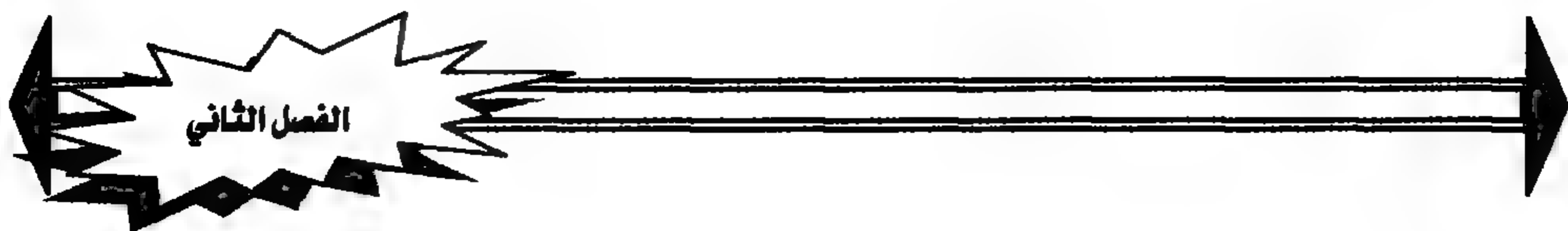
والأمثلة الفيزيائية التي أوردناها في البند السابق نعرف أن لكل منها حلاً في الطبيعة. ولكن هنالك خطر اللبس بين الحقيقة الفيزيائية وبين القالب الرياضي المتمثل بالمعادلة التفاضلية التي نعرفها لتمثل المسألة الحقيقية. فقد يحدث أن يخطئ التفكير فتتم معادلة لا تمت إلى الحقيقة بصلة، وعندها قد لا يوجد للمعادلات حلول. ولنذكر أيضاً أن ليست كل المعادلات التفاضلية ذات حلول. فمثلاً المعادلة:

$$0 = 3 + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (1-18)$$

ليس لها حلول ذات قيم حقيقية لأن dv/ds تخيلية، والمعادلة:

$$0 = v^2 + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (1-19)$$





حلها الوحيد صفر، في حين أن المعادلة $\frac{دص}{دس} + ص = ٠ \dots\dots (٢٠-١)$

لها مجموعة لا متناهية من الحلول هي $ص = ج - هـ$ لكل قيم الثابت جـ.

التمارين (٢-١):

١. اذكر رتبة كل من المعادلات التفاضلية التالية:

$$(أ) ص'' + أ ص = ج أ س \quad (ب) \left(\frac{د^٢ س}{د ن} \right) - س^٣ = \frac{د س}{د ن}$$

= ٤ جتا ن

$$(ج) ش'' - (ن) ش' = (ن) \quad (د) د' ص / د س = ٠$$

$$(هـ) ص'' + ص = ٠ \quad (و) \left(\frac{د س}{د ن} \right) = س''$$

$$(ح) س'' - س' = س^٢$$

٢. ميز بين كل واحدة من المعادلات التفاضلية التالية: أسئلة قيم ابتدائية أم

قيم حاصرة هي:

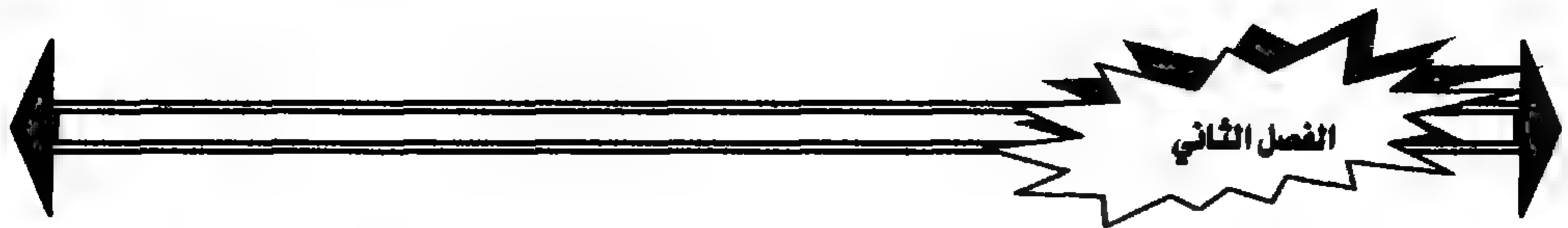
$$(أ) ص'' + ش' = ش، ص(٠) = ٠، ص(١) = ١$$

$$(ب) ص'' + ش' = ش، ص(٠) = ١، ص(١) = ٠$$

$$(ج) ص'' + ش' = ش، ص(٠) = ٠، ص(١) = ١$$

$$(د) \left(\frac{د س}{د ن} \right) - س^٢ = ج ا ن، س(٠) = ٣$$





$$\text{هـ) ص}^1 + \text{ص}^2 - (\text{ص}^1) = \text{ص}^3 + \text{ص}^4 = \text{ص}^5, \text{ ص}^6 = (\text{ص}^1), \text{ ص}^7 = (\text{ص}^1), \text{ ص}^8 = (\text{ص}^1)$$

$$\text{و) ص}^1 + \text{ص}^2 - (\text{ص}^1) = \text{ص}^3 + \text{ص}^4 = \text{ص}^5, \text{ ص}^6 = (\text{ص}^1), \text{ ص}^7 = (\text{ص}^1), \text{ ص}^8 = (\text{ص}^1)$$

٣. بين أن الاقتران أو الاقترانات التي ترافق كلاً من المعادلات التفاضلية التالية هي حلول لها:

$$\text{أ) ص}^1 + \text{ص}^2 = \text{ص}^3, \text{ ص}^4 = \text{ص}^5, \text{ ص}^6 = \text{ص}^7, \text{ ص}^8 = \text{ص}^9$$

$$\text{ب) ص}^1 - \text{ص}^2 + \text{ص}^3 = \text{ص}^4, \text{ ص}^5 = \text{ص}^6, \text{ ص}^7 = \text{ص}^8, \text{ ص}^9 = \text{ص}^{10}$$

$$\text{ص}^1 = \text{ص}^2 = \text{ص}^3 = \text{ص}^4 = \text{ص}^5 = \text{ص}^6 = \text{ص}^7 = \text{ص}^8 = \text{ص}^9 = \text{ص}^{10}$$

$$\text{ج) ص}^1 - \text{ص}^2 + \text{ص}^3 = \text{ص}^4, \text{ ص}^5 = \text{ص}^6, \text{ ص}^7 = \text{ص}^8, \text{ ص}^9 = \text{ص}^{10}$$

$$\text{د) ص}^1 - \text{ص}^2 = \text{ص}^3, \text{ ص}^4 = \text{ص}^5, \text{ ص}^6 = \text{ص}^7, \text{ ص}^8 = \text{ص}^9, \text{ ص}^{10} = \text{ص}^{11}$$

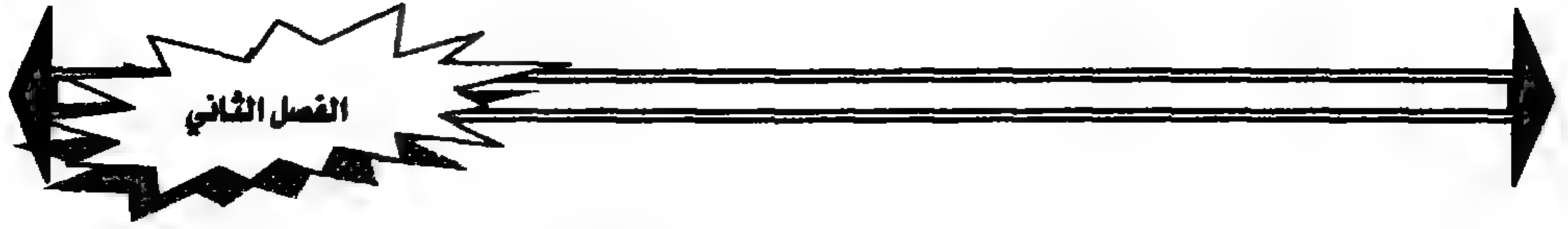
$$\text{هـ) ص}^1 = \text{ص}^2 + \text{ص}^3, \text{ ص}^4 = \text{ص}^5, \text{ ص}^6 = \text{ص}^7, \text{ ص}^8 = \text{ص}^9, \text{ ص}^{10} = \text{ص}^{11}$$

$$\text{و) ص}^1 + \text{ص}^2 + \text{ص}^3 = \text{ص}^4, \text{ ص}^5 = \text{ص}^6, \text{ ص}^7 = \text{ص}^8, \text{ ص}^9 = \text{ص}^{10}, \text{ ص}^{11} = \text{ص}^{12}$$

$$\text{ص}^1 = \text{ص}^2 = \text{ص}^3 = \text{ص}^4 = \text{ص}^5 = \text{ص}^6 = \text{ص}^7 = \text{ص}^8 = \text{ص}^9 = \text{ص}^{10} = \text{ص}^{11} = \text{ص}^{12}$$

٤. (حزونا) أن للمعادلة من النوع $\text{ص}^1 - \text{ص}^2 + \text{ص}^3 = \text{ص}^4$ حلاً بالشكل





ص = هـ^{اس} جتا ب س. أوجد هذا الحل. أيمكنك أن تحزر حلاً آخر؟

٥. "حزرنّا أن للمعادلة ص^١ - ص^٣ - ص^٤ = ٠ حلاً من النوع ص = هـ^{اس} لبعض قيم الثابت أ، أوجد حلين لهذه المعادلة.

٦. إذا كان ص^١(س) وص^٢(س) حلين لمعادلة التمرين ٥، تحقق من أن ص^٣(س) = جـ^١ ص^١(س) + جـ^٢ ص^٢(س) حل أيضاً، وذلك بتعويض ص^٣ في المعادلة جـ^١، جـ^٢، ثابتان اعتباطيان.

٧. عيّن Φ (س) حيث يكون الاقترانان جا (لوس)، جتا (لوس) (س < ٠) حلين للمعادلة Φ (س) ص^١ + $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٠$

٨. بين أن جا (١/س) و جتا (١/س) حلان للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d}{ds} \left(\text{س}^2 \frac{d\text{ص}}{ds} \right) + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٠ \dots\dots\dots (١-٢١)$$

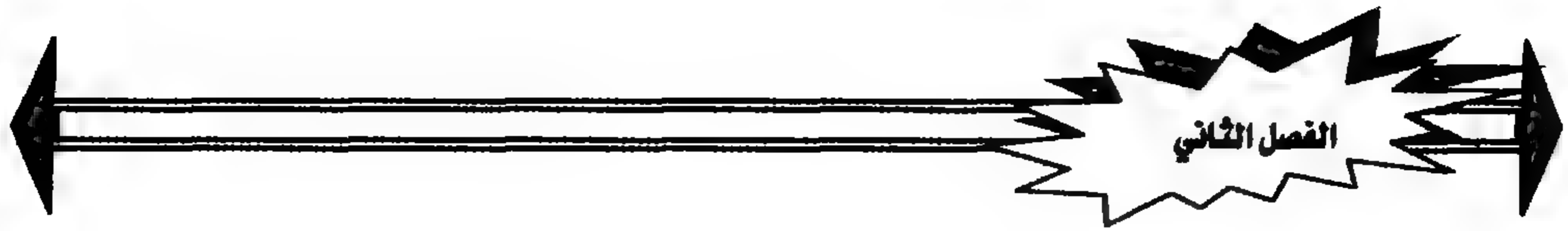
٩. حقق أن ص^١ = جا س، ص^٢ = جتا س حلان للمعادلة التفاضلية ص^١ - ص^٢ = ٠

[إرشاد: جتا س = $\frac{1}{\text{س}}$ (هـ^س - هـ^{-س})، جا س = $\frac{1}{\text{س}}$ (هـ^س + هـ^{-س})]

١٠. على فرض أن Φ (س) حل لمسألة القيم الابتدائية ص^١ + ص^٢ = ص^٣، ص^١ = (١-)، ص^٢ = (١-)، أوجد Φ (١-)، Φ (١-).

١١. على فرض أن Φ (س) حل للمعادلة ص^١ = ص^٢ + ص^٣، ص^١ = (١)، ص^٢ = (١)، أوجد Φ (١)، Φ (١)، Φ (١).





٣-١ معادلات الفروق:

معادلات الفروق هي المقابلات المتكاملة المميزة للمعادلات التفاضلية. تنشأ المعادلات التفاضلية في الدراسات الفيزيائية والبيولوجية، حيث تهتمنا سرعة التغير اللحظية (المشتقة) لمتغير ما بالنسبة إلى متغير آخر. فمثلاً قد يهتمنا السرعة في لحظة معينة لذرة مقذوفة في مسار ما أو تهتمنا سرعة نمو مزرعة بكتيريا في لحظة محددة. ولكن هناك دراسات عديدة ينصب الاهتمام فيها على معرفة التغيرات (الفروق)، لا سرعة التغير.

ونظرية المعادلات التفاضلية تعيش معنا منذ وقت بعيد، أما معادلات الفروق فلم تحظ بالاهتمام الذي تستحقه إلا من وقت قريب، وقد نجم هذا الاهتمام الجديد عن دخول الحاسبة إلى الميدان. فيها تحل أنواع كثيرة من المعادلات (ومنها المعادلات التفاضلية العادية والجزئية) وذلك بحلول عددية تعتمد على تحويلها إلى صيغ معادلات الفروق.

وهذه من المفارقات، فإن كثيراً من المعادلات التفاضلية تبدأ معادلات فروق ثم ننظر في نهاية الأوضاع فتحول المعادلات إلى معادلات تفاضلية تقريبية. (ومعظم نماذج النمو السكاني من هذا القبيل) وقد كان هذا هو الإجراء المتبع حتى وقت قريب، لأن المعادلات التفاضلية كانت أسهل حلاً. ولكن المؤسف أن المعادلات التفاضلية التي نشأت عن معادلات فروق تقرب أحياناً إلى معادلات فروق أخرى كثيراً ما تختلف عن المعادلات الأصلية اختلافاً كبيراً. وفي الفصل ٨ سندرس طرقاً عديدة ونبين كيف تحل المعادلة التفاضلية بتقريبها إلى معادلة فروق.



المثال (١-٣-١):

مريض في مستشفى، وصلت رثاه بجهاز الأكسجين. فلنفرض أن ح حجم الغاز في رئتيه بعد الشهيق. وأن ح ز حجمه بعد الزفير (يسمى الحجم الخافت)، وأن الغاز يختلط في الرئتين اختلاطاً كاملاً، فكم يكون تركيز النيتروجين بعد الشهيق ن؟.

كمية النيتروجين في الرئتين بعد الشهيق ن يجب أن تعادل كميته في الحيز الخافت بعد الزفير ن-١. فإذا كان س ن تركيز النيتروجين بعد الشهيق ن يكون:

$$ح س ن = ح ز س ن-١ \dots\dots\dots (١-٢٢)$$

فبطرح ح س ن-١ من طرفي (١-٢٢)، ينتج:

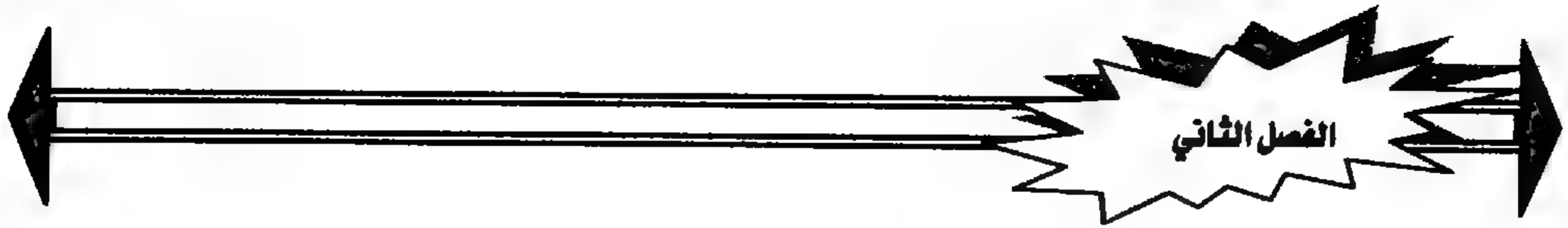
$$ح (س ن - س ن-١) = (ح ز - ح) س ن-١ \dots\dots\dots (١-٢٣)$$

فالفرق س ن - س ن-١ هو المقابل المتكامل للمشتقة، لأنه يقيس التغير في تركيز النيتروجين. فتكون (١-٢٣) هي صورة متكاملة لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.

فإذا استطعنا أن نجد عبارة (بدلالة ن) للتركيز س ن تحقق (١-٢٢) لكل قيم ن=٠، ١، ٢.... نقول إننا وجدنا حلاً لمعادلة الفرق (١-٢٢)، ويسهل حل هذه المعادلة، لأن:

$$س ن = \frac{ح ز}{ح} س ن-١ = \left(\frac{ح ز}{ح} \right) س ن-١ = \dots\dots\dots \left(\frac{ح ز}{ح} \right) س ٠، حيث$$

س. هو تركيز النيتروجين في الهواء.



المثال (١-٣-٢):

يتزايد السمك في بركة حيث أن نموه في أي سنة يبلغ مثلي نموه في السنة التي سبقتها. فلتحليل هذه الحالة نفرض أن e_n هو عدد السمك بعد n من السنوات، فالزيادة بين السنة n والسنة $n+1$ هي $e_{n+1} - e_n$ والمعادلة التي تحكم نمو السمك في هذه البركة:

$$e_{n+1} - e_n = 2(e_n - e_{n-1}) \dots (1-24)$$

ويمكن أن تكتب هذه على النحو:

$$e_{n+1} = e_n^2 - e_{n-1}^2 \dots (1-25)$$

فإذا حددنا العدد الابتدائي e_0 ، والعدد بعد سنة e_1 تصبح المعادلة (١-٢٥) مسألة قيم ابتدائية، ويتضح أن لها حلاً وحيداً. فمثلاً إذا كان $e_0 = 0$ ، $e_1 = 10$ ، يكون:

$$e_2 = e_1^2 - e_0^2 = 100$$

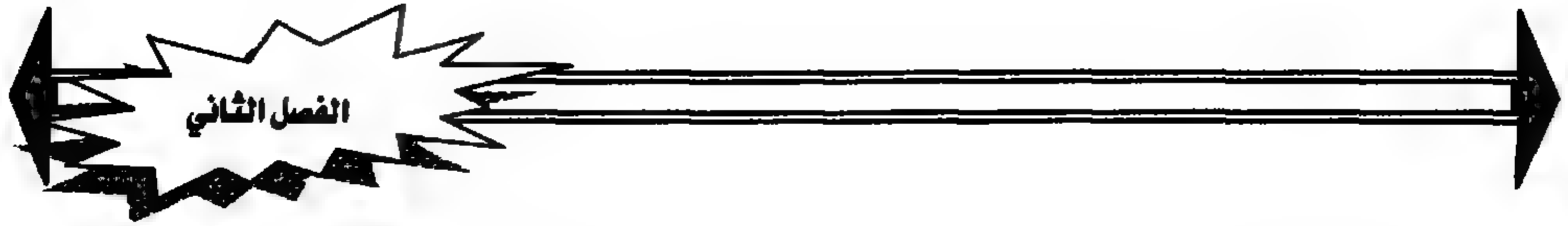
$$e_3 = e_2^2 - e_1^2 = 900$$

$$e_4 = e_3^2 - e_2^2$$

وهكذا مطبقاً إن هذه الطريقة للحصول على e_n متعبة، ولكن في الفصلين ٢، ٤ سنبين كيف أن بعض معادلات الفروق يمكن أن تحل بطريقة أقرب.

وقبل إيراد أمثلة أخرى نعرف معادلة الفرق شكلياً بأنها معادلة تربط قيم s_n بالقيم المختلفة للرمز n ، فإذا كانت n_1 ، n_2 هما على الترتيب أكبر وأصغر قيم n ، في المعادلة كانت $n_1 - n_2$ هي رتبة معادلة الفرق.





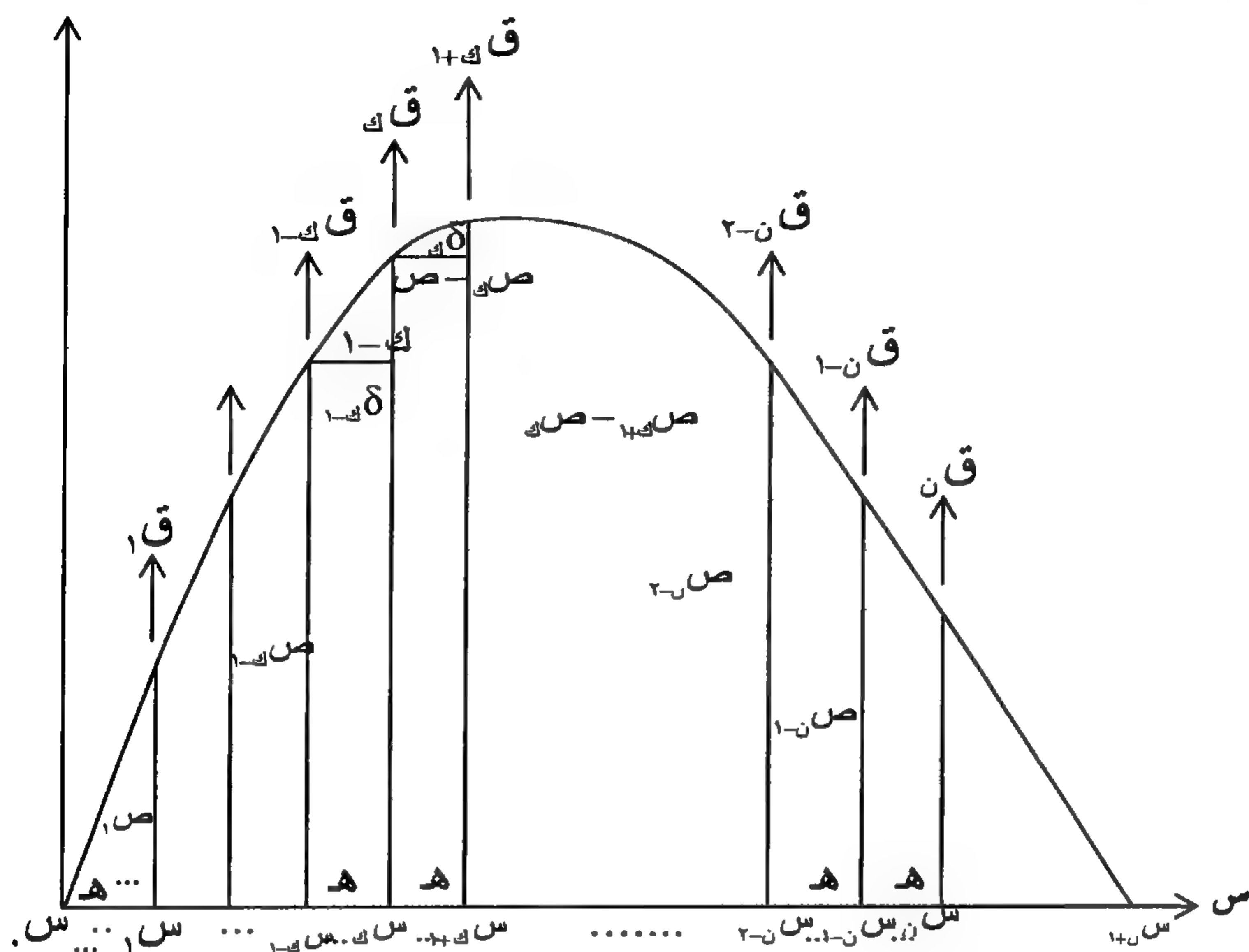
والمعادلة (٢٥-١) رتبها (١+ن) - (١-ن) = ٢ في حين أن (١-٢٢) من الرتبة الأولى.

المعادلة: ٣-٣-١

افرض أن قوى رأسية ق_١،.....ق_٢ تؤثر على سلك على ن نقاط تتباعد على امتداد محور س مسافات متساوية كل منها ه وحدات (انظر الشكل ١-١) فلتحليل هذا الوضع نفرض أن تؤثر الخيط ثابت بين أي نقطتين متاليتين من نقاط تأثير القوى (وبالطبع هذا الثابت يختلف من مسافة لأخرى).

ونفرض أيضاً أن السلك لا وزن له. فإذا كان ص_ك هناك هو انحراف السلك رأسياً، باتجاه محور ص عند النقطة س_ك، وكانت θ_k هي الزاوية بين اتجاه التوتر واتجاه محور س الموجب، يكون حسب الشكل ١-١:





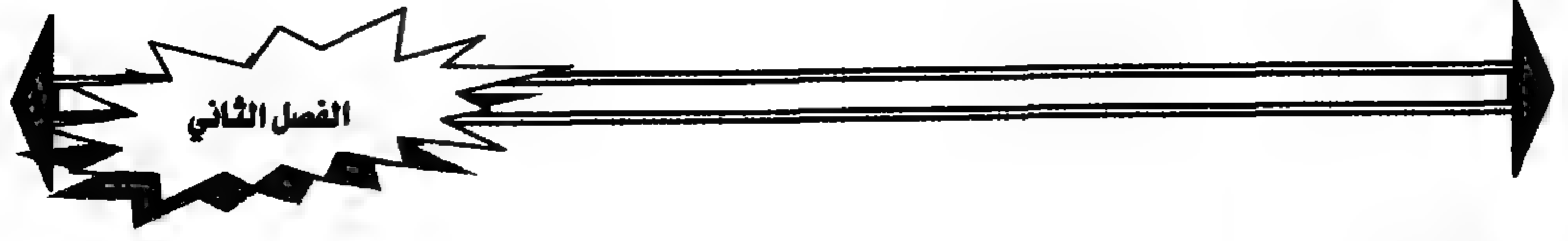
فالشكل ١:١

$$\frac{\text{ص ك} + 1 - \text{ص ك}}{\text{هـ}} = \text{ظا ث ك}$$

أي أن:

$$صك+١ - صك = هـ ظا \theta ك (٢٦-١).....$$

ولنذكر أن التوتر ثابت بين أي نقطتين متتاليتين فاتجاه قوة التوتر بينهما ثابت، فإذا فرضنا أن السلك ثابت (ص=٠)، تكون محصلة كل القوى



على النقطة (س، ص) صفراً، ومركبة T في اتجاه ص هي $T \cos \theta$ ،
ومركبة $-T \sin \theta$ في الاتجاه نفسه هي:

$-T \sin \theta$. فنجمع القوة Q المبذولة على تلك النقطة، فينتج:

$$T \cos \theta - T \sin \theta \cos \theta + Q = 0 \quad (1-27)$$

وكذلك باتجاه محور س: $T \cos \theta - T \sin \theta \sin \theta = 0 \quad (1-28)$

وتشير المعادلة (1-28) إلى أن مركبة التوتر باتجاه محور س لا يتغير. لذا

$$\text{سنرمز إلى } T \cos \theta \text{ بالرمز } T^* = \frac{T \cos \theta}{\cos \theta} + Q = 0$$

$$\text{أي أن: } T^* (\cos \theta - \sin \theta) + Q = 0 \quad (1-29)$$

ونقيم (1-26) و (1-29)، نحصل على $\frac{T^*}{\cos \theta} = (\cos \theta - \sin \theta) - (\cos \theta -$

$$\sin \theta) + Q = 0$$

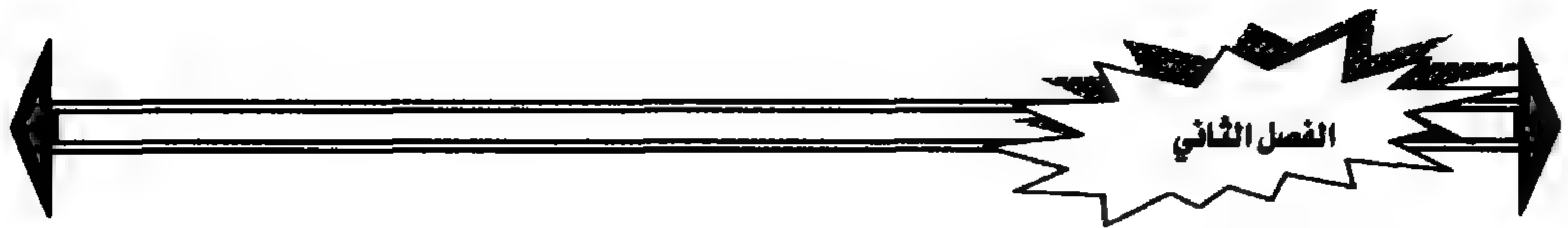
$$\text{أي أن: } \cos \theta - \sin \theta + \cos \theta + \sin \theta - \frac{T^*}{\cos \theta} + Q = 0 \quad (1-30)$$

وهي معادلة فروق من الرتبة الثانية. ولكن على خلاف المثال السابق،
ليس من المناسب تعيين قيمتين ابتدائيتين ص،، هنا ولكن تتجلى أمامنا
القيمتان الحاصرتان:

$$\cos \theta = 0, \sin \theta = 1 \quad (1-31)$$

فالمعادلات (1-30) و (1-31) تكون فيهما مسألة قيم حاصرة، وهذه
المسألة لم تكتمل صياغتها بعد، لأن T^* غير معروف، فإذا عرفنا ص، والتوتر
الابتدائي T ، يكون: $\cos \theta = 1$ / هـ فينتج أن:





$$t^* = t. \text{ جتا } \theta. = \frac{t}{\sqrt{1 + (v/c)^2}}$$

مثال (١-٣-٤):

تصور مجتمعاً يتزايد من جيل إلى جيل، وليكن عدده عن في الجيل ن. وواضح أن العدد في الجيل ن يعتمد على العدد في الجيل الذي قبله، وقد يعتمد أيضاً على الأعداد في الأجيال التي قبلهما، فمثلاً قد تستنفذ أجيال سابقة معظم الموارد حتى يصير التكاثر على الأجيال اللاحقة صعباً أو مستحيلاً، فالمعادلة:

$$s_{n+2} = r s_{n+1} + z s_n \dots (١-٣٢)$$

يمكن اعتبارها نموذجاً للنمو السكاني حيث يتكون الجيل ن + ٢ من عناصر ن + ١ وعناصر من الجيل ن والثابتان ر، ز يقيسان الأهمية النسبية لهذين المكونين.

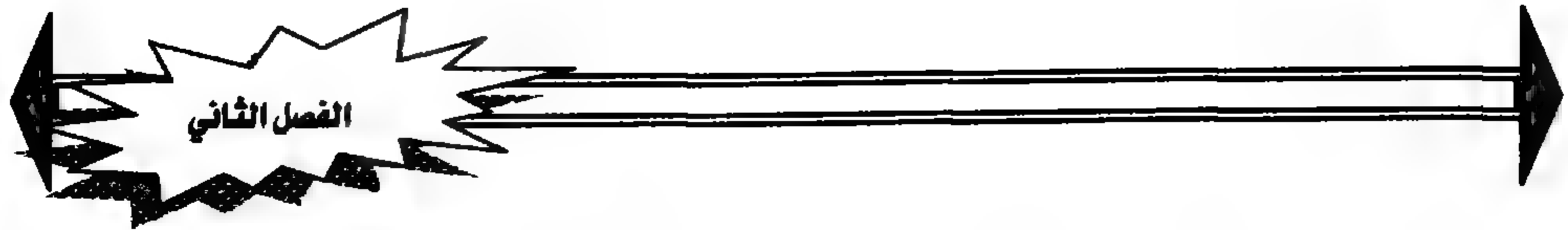
المثال (١-٣-٥):

تبارى شخصان في لعبة، وكان الرهان ديناراً كل مرة، وكان احتمال ربح الأول كل مرة ف، واحتمال ربح الثاني ق؛ ف + ق = ١، فلنفرض أن مجموع ما كان معهما د ديناراً ولنجعل س_ك يرمز إلى احتمال أن يربح الأول في النهاية كل ما مع الثاني حيث ك هي عدد الدنانير التي مع الأول، حيث ٠ ≤ ك ≤ د. فإذا كان الأول معه الآن ك، فإن احتمال أن يصير معه في اللعب الثانية ك + ١ هو ف، واحتمال أن يصير معه ك - ١ هو ق. فيكون:

$$s_k = f s_{k+1} + q s_{k-1} \dots (١-٣٣)$$

$$\text{والقيمتان الحاصرتان هما } s_0 = ٠, s_D = ١ \dots (١-٣٤)$$





وسنعود إلى هذا المثال في البند ٤-٨، وسنجد أنه إذا كانت F أكثر ولو قليلاً من $\frac{1}{2}$ يصير الاحتمال كبيراً جداً في أن يؤول كل المبلغ إلى الأول، حتى وإن بدأ بأقل مما مع الثاني. وهذا هو الحال في نوادي القمار حيث يكون الخط دائماً في جانب النادي.

وهذا قد تفيد معادلات الفروق في حساب التكامل:

المثال (١-٣-٦) يتصل التكامل التالي بقيمة اقتران الخطأ الذي كثيراً ما ينشأ في المسائل الفيزيائية:

$$K_n(s) = \int_0^\infty \frac{(s-n)^k}{k!} e^{-s} ds \quad n=0,1,2,\dots \quad (1-35)$$

حيث $k! = k(k-1)(k-2)\dots 1$ ، k عدد صحيح

موجب، $1=0!$ ويمكن أن نكتب $K_n(s)$ على النحو التالي:

$$K_n(s) = \int_0^\infty \frac{(s-n)^{k-1}}{(k-1)!} (s-n) e^{-s} ds \quad n=0,1,2,\dots$$

$$= \frac{s}{k} K_{n-1}(s) + \int_0^\infty \frac{(s-n)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-s} ds \quad n=0,1,2,\dots \quad (1-36)$$

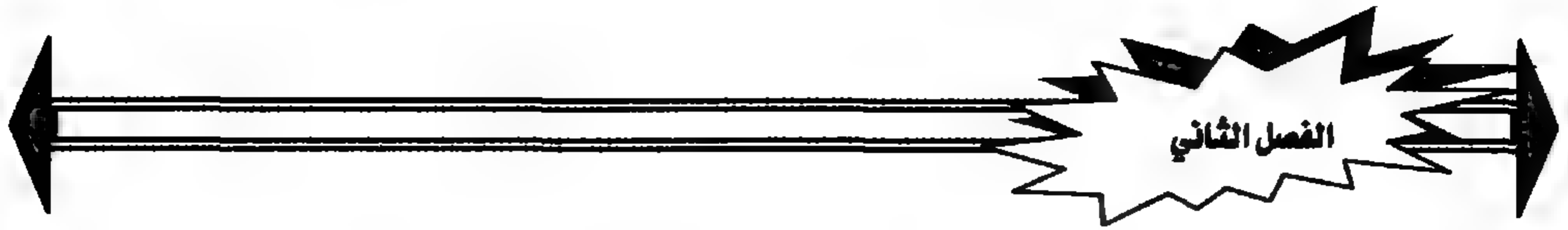
فبمكاملة الحد الأخير من هذه المعادلة بالأجزاء يتتج:

$$K_n(s) = \frac{s}{k} K_{n-1}(s) + \frac{1}{k} K_{n-1}(s) \quad n=0,1,2,\dots \quad (1-37)$$

ومثل هذه من معادلات الفروق تسمى علاقات تكرار (recurrence

relations) لاحظ أن:





كا. (س) = $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ د ن فإذا كاملناها بالأجزاء ينتج:

$$\text{كا. (س)} = \int_0^{\infty} (n - x) e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx - \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \text{س. كا. (س)}$$

ولمعرفة هاتين القيمتين لأي س يمكن أن نحسب كا. (س) لكل ك.

وعلى الأخص: إذا كان س = 0، يمكن أن نستعمل القانون ٥٨ في الملحق

١ لنحصل على أن كا. (0) = $\sqrt{2/\pi}$ ، وأن كا. (0) = $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ فمن (١-٣٧) ينتج:

$$\text{كا. (0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \text{كا. (0)}_2، \text{ فإذا كا. (0)}_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1+n}} \text{ و كا. (0)}_{1+n} =$$

$$\frac{(1+n)!}{(2+n)!}$$

التمارين (١-٣):

١. اذكر رتبة كل من معادلات الفروق التالية:

$$(أ) \text{ ص}_n + 1 = \text{ص}_n^2$$

$$(ب) \text{ ص}_n + 3 = \text{ص}_n^2 - 3$$

$$(ج) \text{ ص}_n + 3 = \text{ص}_n^2 (1 + \text{ص}_n) \quad (د) \text{ ص}_n + 3 = \sqrt{\text{ص}_n + 3}$$

$$(هـ) \text{ ص}_n + 5 = 2\text{ص}_n + 3 + \text{ص}_n^2 = \text{ص}_n^2 + 6$$

$$(و) \text{ ص}_n + 1 = \sqrt{2 - \text{ص}_n} - \text{ص}_n + \text{ص}_n^2$$

$$(ز) \text{ ص}_n \text{ ص}_{n+1} = \text{ص}_n^2 - \text{ص}_{n+1}^2 = 1 - \text{ص}_n^2$$



٢. وضح بالرسم البياني عمليات النمو المتميزة التي تمثلها الصيغ التالية،
ابتداء من الزمن $n=0$ هل يقترب s_n من قيمة حاصرة (أو من اتزان)
باقترب n من اللانهاية؟

(أ) $s_n = 100 + 100(2)^{-n}$

(ب) $s_n = 100 + 100\left(\frac{1}{n+1}\right)$

(ج) $s_n = 100 + 5n^2$

(د) $s_n = \sqrt{n+9}$

٣. تحقق أن $s_n = n^2 + n$ حل لمعادلة الفرق $s_{n+1} - s_n = 2(n+1)$ ،
وأن $s_n = n^2 + n + 1$ حل آخر لها، مهما تكن قيمة الثابت جـ.

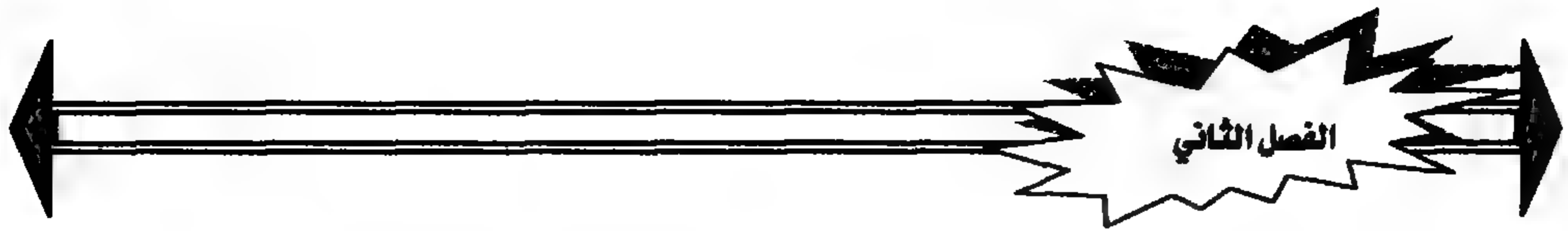
٤. تحقق أنه مهما تكن قيمة الثابت ك، فإن $s_n = 2^{n/(1+n)}$ حل لمعادلة
الفرق: $s_2 = 2$ ، $s_{n-1} = 2^{n-1}$

٥. كان نمو البكتيريا في مزرعة وافرة الغذاء يقاس مرة كل ساعتين. فكان كل
مرة يزيد ٣٠ في المئة عما كان في سابقتها.

(أ) صف عملية نموه بمعادلة فرق تعطي e_n أي عدد البكتيريا بعد n
ساعات.

(ب) ما رتبة هذه المعادلات؟

(ج) إذا كان العدد الابتدائي ١٠٠٠، فما قيمة e_2 ؟ e_4 ؟



٦. قدر ما ينتج الفرد الواحد في أمريكا من نفايات بحوالي ٥ باوند يومياً، وبتزايد هذا بمعدل ٤ في المئة في السنة. فليكن f_n هو معدل إنتاج الفرد الواحد من النفايات بعد n من السنوات:

(أ) صف بمعادلة فرق تزايد إنتاج الفرد الواحد للنفايات.

(ب) أوجد f_2 ، f_4 .

٧. "حزرنّا أن للمعادلة $v_{n+2} - 3v_{n+1} - 4v_n = 0$ حلولاً من النمط $v_n = \lambda^n$ ، حيث λ ثابت ما، أوجد حلين لهذه المعادلة.

٨. على فرض أن v_n ، e_n حلان لمعادلة الفرق $v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n = 0$ على فرض أن v_n ، b_n اقترانان في n ، بيّن أن $f_n = j_1 - v_n + j_2 = 0$ هو أيضاً حل، مع جميع قيم الثابتين j_1 ، j_2 .

٩. بين أنه مهما يكن الثابتان j_1 ، j_2 فإن:

$$v_n = \frac{1}{14} (n - \frac{9}{14}) + j_1 - j_2 - (6 - n).$$

حل لمعادلة الفرق:

$$v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n = 0$$

١٠. حقق أن $v_n = 2^{n-1} \times n$ حل لمعادلة الفرق.

$$v_{n+2} = 2^{n+1} + 2v_{n+1} - 3v_n$$

١١. تحقق أن $v_n = 2^n$ ، $v_n = n \times 2^n$ حلان لمعادلة الفرق

$$v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n = 0$$



١٢. تحقق أن: $E_n = J_1^{(2)} + J_2^{(2)} + \frac{J_3^{(2)}}{8}$ ، حيث J_1, J_2, J_3 أي

ثابتين، حل المعادلة الفرق $S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n = 0$.

١٣. تحقق أن $S_n = J_1^{(2)} + J_2^{(2)} + J_3^{(2)}$ حل لمعادلة

الفرق $S_{n+2} + S_{n+1} + S_n = 0$ مع جميع قيم الثابتين J_1, J_2, J_3 . أوجد

حلاً يحقق الشرطين الابتدائيين $S_0 = 1, S_1 = 2$.

١٤. يعرف اقتران جاما بالصيغة: $\Gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ، د

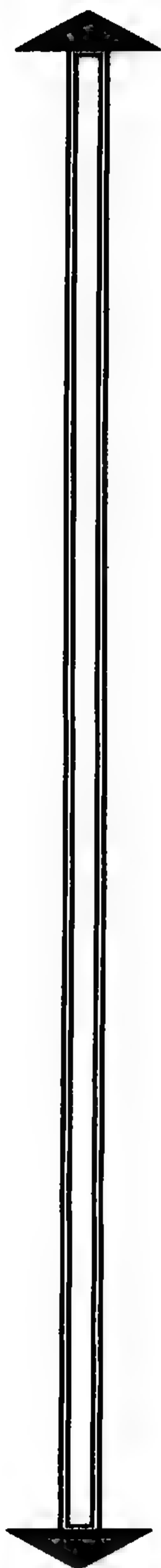
بين أنه يحقق معادلة الفرق $\Gamma_n = (1-E)^3 \Gamma_{n-1}$ ، ثم أثبت أن $\Gamma_n = (1-E)^3$

$(1-E)!$ ، E عدد موجب.

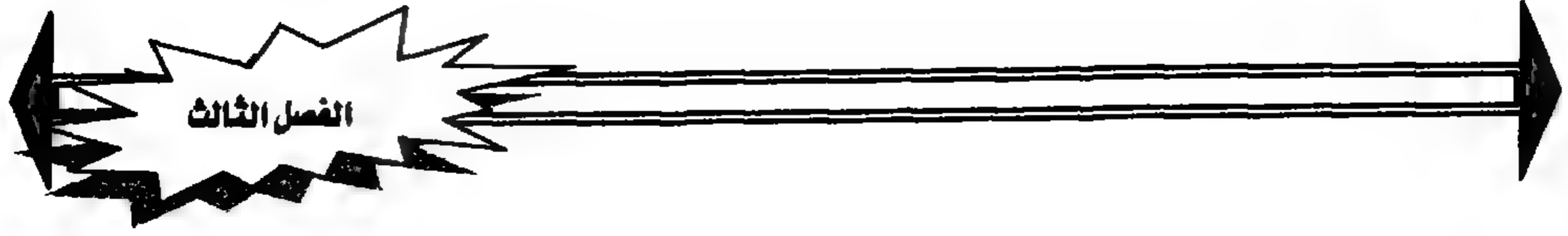
١٥. ليكن $K_n(s) = \frac{J_n^{(s)} - J_{n-1}^{(s)}}{J_n^{(s)} - J_{n-1}^{(s)}}$ ، د بَيِّن أن K_n يحقق

معادلة الفرق:

$$K_{n+2}(s) - 2K_{n+1}(s) + K_n(s) = 0$$



المصفوفات



الفصل الثالث

المصفوفات

١.١ مقدمة:

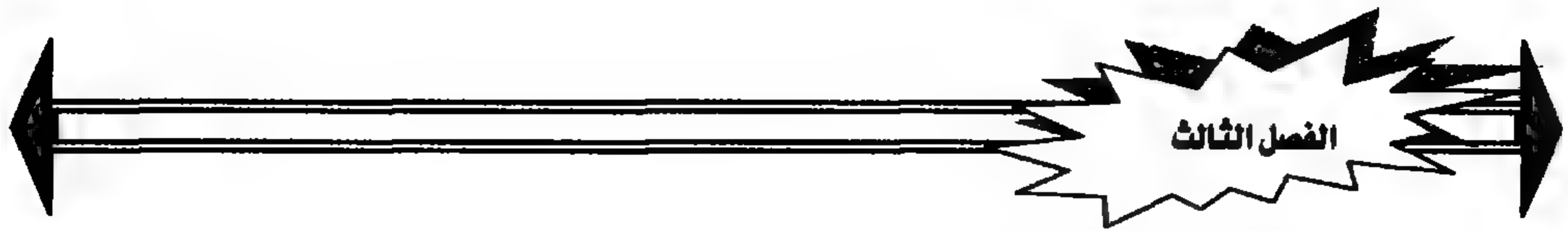
تعتبر المصفوفات من المفاهيم الحديثة في مجال الرياضيات وتطبيقاتها. وقد لاقت اهتماماً كبيراً من علماء الرياضيات حيث وجدوا لهم مجالاً كبيراً من خلالها للبحث عن مجالات تطبيقها في الحياة العملية وقد دخلت مجالات كثيرة ساعدت في حلول المعادلات ذات المجاهيل الكثيرة من حيث وعدد المتغيرات. وهذا يحصل غالباً في التطبيقات الإحصائية والاقتصادية وفي مجال الإنتاج وغيره من المجالات الأخرى وقبل الخوض في العمليات على المصفوفات لا بد من التعرف على ماهية المصفوفة ومكوناتها وأنواعها إلى ما شابه ذلك من المفاهيم.

تعريف (١-١):

المصفوفة هي منظومة من الأعداد الحقيقية وضعت ضمن أقواس متعامدة لتعطي اسماً وقد اصطلح على أن يكون أحد أحرف الأبجدية لتأخذ الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$





ويمكن صياغة الصورة أعلاه على النحو.

$$1 = [a_{ij}] , i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

وتدل m على عدد الصفوف في المصفوفة بينما يدل n على عدد الأعمدة وكذلك يدل $m \times n$ على رتبة المصفوف وتسمى العناصر.

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \text{ مداخل المصفوفة.}$$

وتكون مداخل المصفوفة ناتجة من تقاطع الصف مع العمود الدال على موقع المدخل ويكون عدد مداخل المصفوفة ناتج من العلاقة التالية: عدد المداخل $= n \times m$.

ولتوضيح المفاهيم السابقة نورد المثال التالي:

$$\text{مثال (1-1): لتكن لدينا المصفوفة: } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد:

(1) رتبة المصفوفة

(2) عدد مداخل المصفوفة A

(3) قيم المداخل a_{11}, a_{12}, a_{13}

(4) عدد الصفوف للمصفوفة وعدد الأعمدة فيها.



الحل:

(١) رتبة المصفوفة 3×3

(٢) قيم المداخل المطلوبة $a_{11}=1, a_{12}=2, a_{13}=3, a_{21}=4, a_{22}=5, a_{23}=6, a_{31}=7, a_{32}=8, a_{33}=9$

(٣) عدد المداخل $3 \times 3 = 9$

(٤) عدد الصفوف $= 3$ ، عدد الأعمدة $= 3$.

ملاحظة: أي مصفوفة على الصورة العامة يمكن كتابتها كمصفوفات صفوف على النحو التالي:

$$- a_1 = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n}] \quad - a_2 = [a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \dots \ a_{2n}]$$

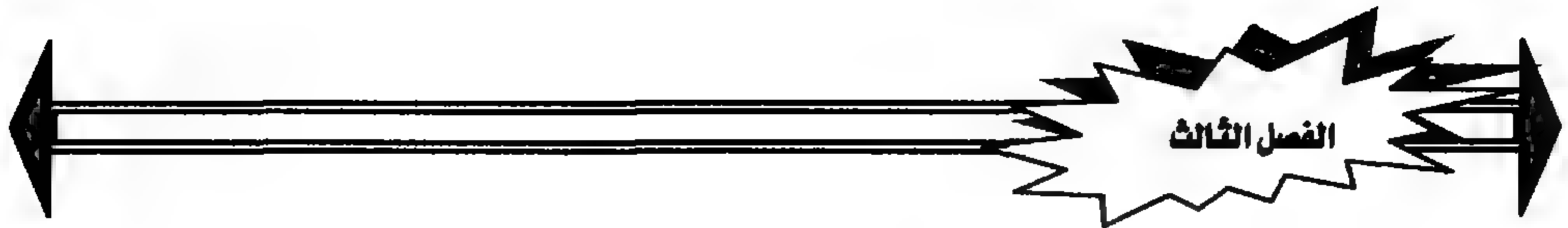
- $a_m = [a_{m1} \ a_{m2} \ a_{m3} \ \dots \ a_{mn}]$ وكذلك يمكن كتابتها على شكل مصفوفات أعمدة

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = a_{(1)} \dots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = a_{(n)} \quad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix} = a_{(1)} \quad \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix} = a_{(2)}$$

(٢-١) تساوي مصفوفتين:

تعريف (٢-١) لتكن لدينا المصفوفتان $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$

فإذا كان لكل i, j $a_{ij} = b_{ij}$ فإننا نقول أن المصفوفتين $A = B$ أو بتعبير آخر $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ وبصورة عامة تتساوى المصفوفتان إذا كانت المداخل المتناظرة متساوية أي إذا:



$$\begin{bmatrix} \text{ب}_{11} & \text{ب}_{21} & \text{ب}_{31} \\ \text{ب}_{12} & \text{ب}_{22} & \text{ب}_{32} \\ \text{ب}_{13} & \text{ب}_{23} & \text{ب}_{33} \end{bmatrix} = \text{ب} \quad \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{bmatrix} = \text{أ}$$

كانت: وحتى تكون المصفوفتان أ، ب متساويتان أي $\text{أ} = \text{ب}$ إذا كان:

$$\text{أ}_{11} = \text{ب}_{11} \quad \text{أ}_{21} = \text{ب}_{21} \quad \dots \quad \text{أ}_{33} = \text{ب}_{33}$$

مثال (٢-١): إذا كان لدينا المصفوفتان

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{فهل المصفوفتان أ، ب متساويتان.}$$

الحل: $\text{أ} \neq \text{ب}$ لأن $\text{أ}_{22} \neq \text{ب}_{22}$ على الرغم من أن لهما نفس الرتبة.

مثال (٣-١): إذا كان لدينا المصفوفتين:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ب} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{فهل المصفوفتان أ- ب}$$

متساويتان؟

الحل:

إن رتبة المصفوفة أ هي (2×2) أما رتبة المصفوفة ب هي (2×3) وبما أن رتبة المصفوفتان غير متساويتان أي $(2 \times 2) \neq (2 \times 3)$ وعليه فإنهما غير متساويتين.

مثال (٤-١): على اعتبار أن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1- & 2 & 3 \\ 4 & 3- & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$



المطلوب: إيجاد مجموع ت + ع + ص + س.

الحل: بما أن المصفوفتان متساويتين فمن هذه الخاصية فإن العناصر المتناظرة متساوية وعليه فإننا نجد أولاً قيم المجاهيل ثم نأخذ المجموع أي:

$$ت = 1-، ع = 2، ص = 4-، س = 3- \text{ وعليه فإن } 6- = (1-) + 2 + (4-) +$$

$$(3-) = ت + ع + ص + س$$

مثال (٥-١): إذا كان لدينا المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 3س + ص \end{bmatrix} = ب \begin{bmatrix} 1س - ص & 2س \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = أ$$

وكانت المصفوفتان متساويتين فأوجد قيم ص، س ثم أوجد س + ص

الحل: نجد أولاً قيم ص، س على النحو التالي بما أن أ = ب فإن:

$$(1) \dots\dots\dots 4 = 2س - ص \text{ يجمع (1) مع (2)}$$

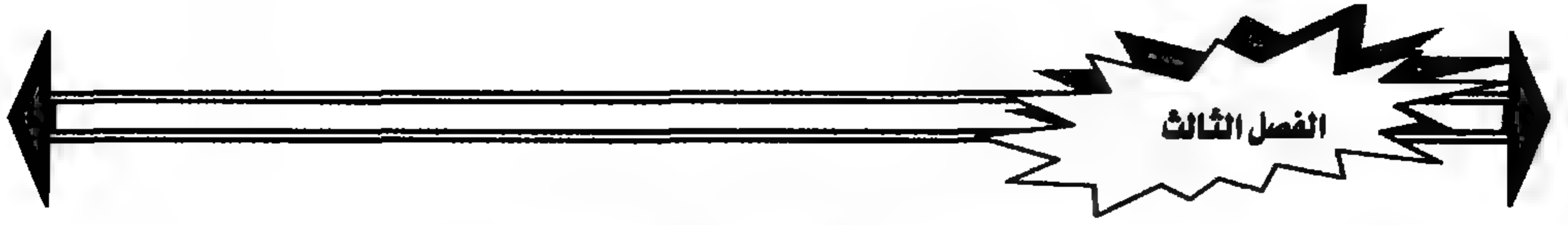
$$(2) \dots\dots\dots 6 = 3س + ص$$

$$5س = 10 \iff س = 2$$

وبالتعويض عن س في معادلة (١) نجد أن:

$$2(2) - ص = 4 \iff ص = 0$$

$$\text{وعليه فإن: } س + ص = 2 + 0 = 2$$



(١-٣): أنواع المصفوفات: Kinds of Matrices

هناك الكثير من هذه الأنواع ولكن سنركز دراستنا على أهم هذه المصفوفات:

(١) المصفوفة المربعة: Square Matrix

تعريف (١-٣): إذا كان عدد صفوف مصفوفة ما مساوياً لعدد الأعمدة فإنه يقال لهذه المصفوفة بالمصفوفة المربعة وتكون صورتها العامة على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

مثال (١-٦): هل المصفوفات التالية مصفوفات مربعة؟

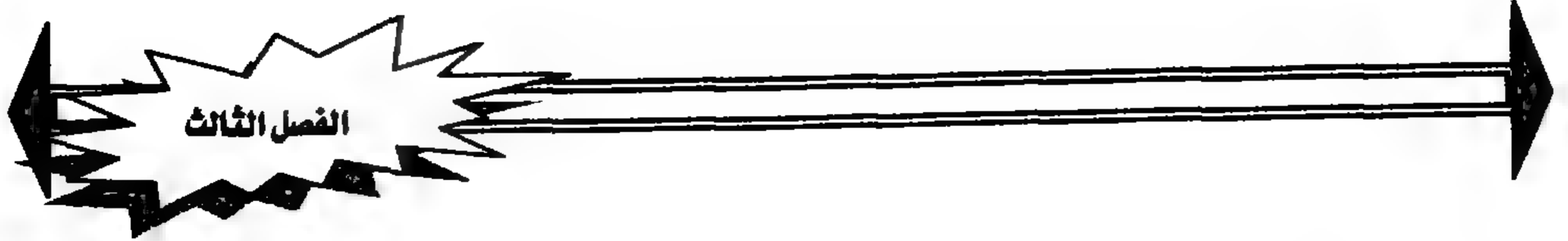
الحل: المصفوفة أ مصفوفة مربعة من الرتبة (٣×٣) بينما المصفوفة ب ليست مصفوفة مربعة لأن رتبتهما (٢×٣).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(٢) المصفوفة الصفرية: Zero Matrix

تعريف (١-٤): تكون المصفوفة مصفوفة صفرية إذا كانت جميع مدخلاتها صفراً فالمصفوفات التالية:





$$3 \times 3 \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \text{ج} \quad 2 \times 2 \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \text{ب} \quad 2 \times 3 \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \text{أ}$$

جميعها مصفوفات صفرية ويمكن التعبير عن المصفوفة الصفرية

$$1 = [a_{ij}]_{n \times m} = [0]_{n \times m} = 0_{n \times m}$$

(٣) المصفوفة المحايدة أو الوحدة: Identity Matrix

$$[a_{ij}] = 1$$

تعريف (١-٥):

يقال للمصفوفة بأنها المصفوفة المحايدة للضرب إذا كانت جميع عناصر القطر الأول للمصفوفة I وباقي عناصرها الأخرى صفراً بحيث تكون المصفوفة مربعة ويرمز لها بالرمز I_n حيث n تدل على رتبة المصفوفة المربعة والصورة العامة لهذه المصفوفة:

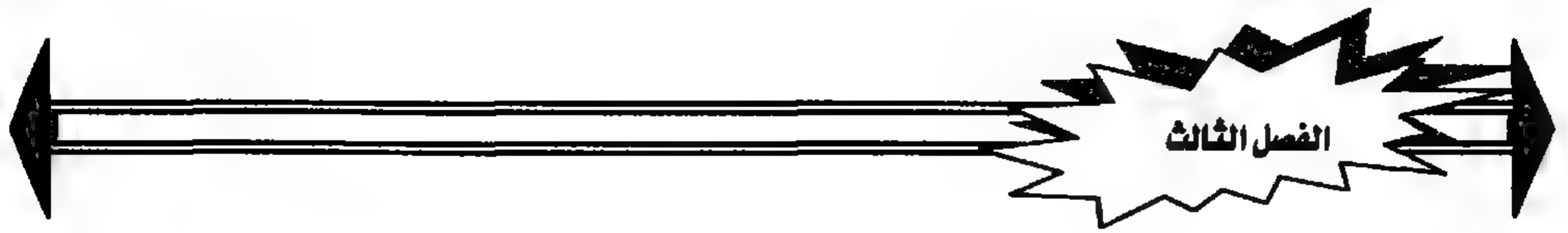
$$(٤) \quad [I] = {}_1I \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = {}_2I \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = {}_3I \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = I_n$$

المصفوفة المتماثلة: Symmetric Matrix

تعريف (١-٦):

يقال للمصفوفة المربعة بأنها مصفوفة متماثلة حول القطر الأول إذا كانت العناصر فوق القطر الأول مساوية للعناصر تحت القطر الأول.





مثال (٧-١): هل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ مصفوفة متماثلة؟

الحل: المصفوفة A مصفوفة متماثلة لأن جميع العناصر فوق القطر الأول مساوية لجميع العناصر تحت القطر الأول.

(٥) المصفوفة المتماثلة العكسية: Anti-Symmetric

تعريف (٧-١):

يقال للمصفوفة A بأنها متماثلة عكسية إذا كانت عناصر المصفوفة فوق القطر الأول مساوية عناصر المصفوفة تحت القطر الأول عددياً ومخالفة لها في الإشارة وكانت عناصر القطر الأول صفراً.

مثال (٨-١): هل المصفوفة المربعة $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة متماثلة عكسياً؟

الحل: نعم المصفوفة A متماثلة عكسياً لأنها حققت الشروط الواردة في التعريف.

(٦) المصفوفة القطرية: Diagonal Matrix

تعريف (٨-١): يقال للمصفوفة المربعة بأنها قطرية إذا كانت عناصر القطر الأول تختلف عن الصفر وباقي العناصر صفراً.



مثال (٩-١): هل المصفوفات التالية تمثل مصفوفات قطرية؟

$$4 \times 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \times 2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 3 \times 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

الحل: نعم تمثل مصفوفات قطرية لأن عناصر قطرها الرئيسي أعداداً حقيقية تختلف عن الصفر وباقي عناصرها صفراً.

(٧) المصفوفة العددية:

تعريف (٩-١): تسمى المصفوفة القطرية التي يتساوى فيها عناصر قطرها الرئيسي وباقي العناصر صفراً بالمصفوفة العددية وهي تمثل حالة خاصة من المصفوفة القطرية.

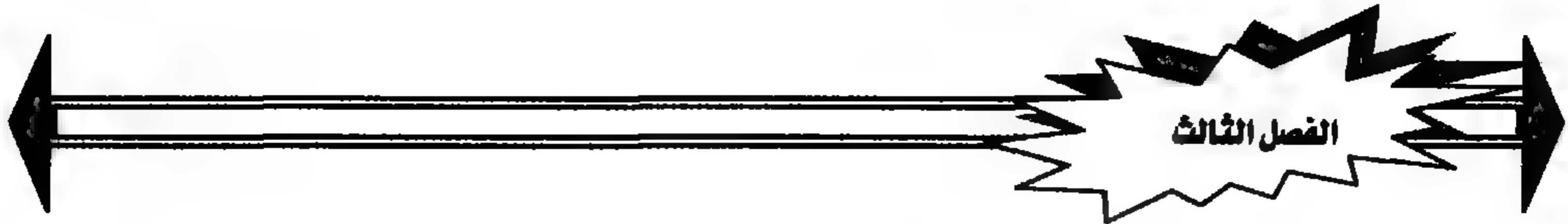
مثال (١٠-١): هل المصفوفات التالية تمثل مصفوفات عددية؟

$$2 \times 2 \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = 3 \times 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

الحل: نعم مصفوفة عددية لأن عناصر قطرها الرئيسي متساوية.

تعريف (١٠-١):

يقال للمصفوفة $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ الناشئة من تبديل المصفوفة $A = [a_{ji}]_{m \times n}$ بأعمدتها بمبدول المصفوفة A .



مثال (١١-١):

$$\begin{bmatrix} 1- & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \text{ب} \begin{bmatrix} 5 & 3- & 1 \\ 0 & 4 & 1- \end{bmatrix} = \text{أ}$$

فأوجد مبدول (أ)، مبدول (ب).

الحل: باستخدام التعريف أعلاه فنقوم بتبديل عناصر الصفوف لتصبح عناصر للأعمدة في مبدول المصفوفة وعليه فإن:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1- \end{bmatrix} = \text{مبدول ب} \begin{bmatrix} 1- & 1 \\ 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \text{مبدول (أ)}$$

(١-٤) العمليات على المصفوفات (Operations on Matrices):

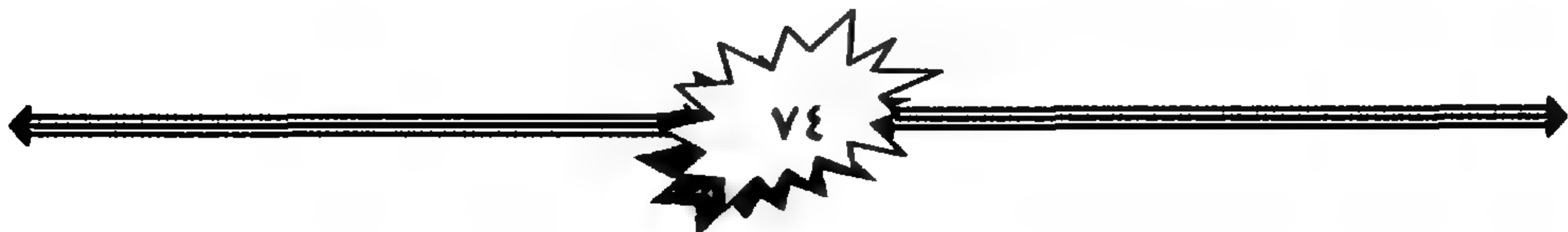
(١-٤-١) عملية الجمع على المصفوفات Addition Operation on Matrices:

تعريف (١١-١): لتكن لدينا المصفوفتان:

$\text{أ} = [\text{أ}_{ij}]$ ، $\text{ب} = [\text{ب}_{ij}]$ لهما نفس الرتبة فالمصفوفة الناتجة من جمع عناصر المصفوفتين المتناظرة جمعاً عددياً تسمى بمصفوفة الجمع للمصفوفتين أ، ب وتسمى بالمصفوفة ج أي:

$$\text{أ} + \text{ب} = [\text{أ}_{ij}] + [\text{ب}_{ij}] = [\text{ج}_{ij}] = \text{ج}$$

$$\text{وإذا كانت: } \text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}'_{11} & \text{أ}'_{12} \\ \text{أ}'_{21} & \text{أ}'_{22} \end{bmatrix} = \text{ب} \begin{bmatrix} \text{ب}'_{11} & \text{ب}'_{12} \\ \text{ب}'_{21} & \text{ب}'_{22} \end{bmatrix}$$



فإن المصفوفة الناتجة ج = [جز] =

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

ملاحظة: تسمى المصفوف $[0]$ $m \times n$ بمصفوفة محايدة بالنسبة لعملية الجمع لباقي مجموعة المصفوفات أي:

$$[0]_{m \times n} + [A]_{n \times m} = [A]_{n \times m} = [A]_{n \times m} + [0]_{m \times n}$$

مثال (١٢-١): أوجد إن أمكن ناتج الجمع بين المصفوفتين:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل: بالنظر إلى رتبة كل من المصفوفتين نلاحظ أن رتبة أ هي (٢×٣) بينما رتبة ب هي (٢×٢) وعليه فإنه لا يمكن جمع المصفوفتين أ، ب لأنه ليس لهما نفس الرتبة.

مثال (١٣-١):

إذا كانت لدينا المصفوفتين:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد ناتج أ + ب، ب + أ وماذا تستنتج؟

الحل:

$$ج = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 3-3 \\ 2-4 & 4+1 \\ 2+5 & 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3- \\ 2- & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = ب + أ$$

$$ج = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+3- \\ 4+2- & 1+4 \\ 5+2 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3- \\ 2- & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = أ + ب$$

نلاحظ أن ج = أ + ب = ب + أ أي أن الجمع يحقق الخاصية التبادلية على جمع المصفوفات.

مثال (١٤-١):

$$\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{18} \\ 1- & \text{لو} \end{bmatrix} = ب \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{50} \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = أ إذا كان أ$$

$$ج = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{4} \\ 2 & \sqrt{16} \end{bmatrix} \text{ وكان ج = ب + أ أثبت أن } 1 = \text{ص.ص}$$

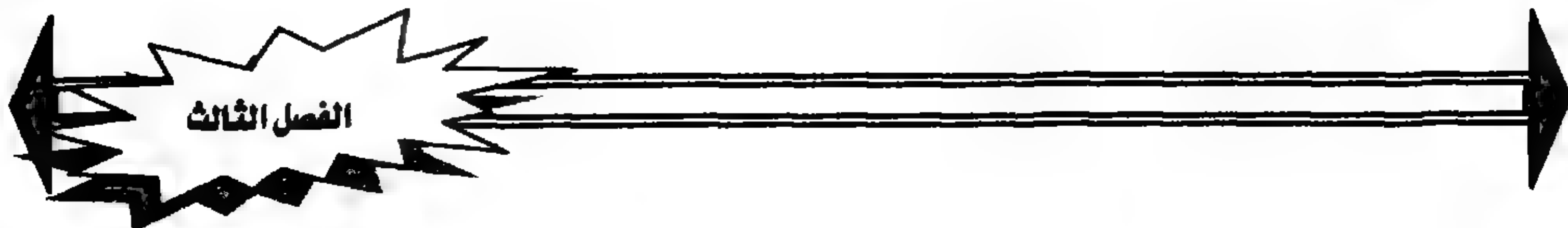
الحل:

$$\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{18} \\ 1- & \text{لو} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{50} \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{18} \\ 1- & \text{لو} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{50} \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = ب + أ$$

$$\frac{2}{2} = \text{ص} \leftarrow \frac{2}{2} = \text{ص} \leftarrow \frac{2}{2} = \text{ص} \leftarrow \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{4} \\ 2 & \sqrt{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3}{4} = \text{ص} \leftarrow \frac{3}{2} = \text{ص} \leftarrow \frac{3}{2} = \text{ص}$$

$$1 + \text{لو} = \text{لو} + 1$$



$$\text{لو } ٣\text{س} = \text{لو } ١٦\text{س} \Leftarrow \text{لو } ٣\text{س} = \text{لو } ٤\text{س} \Leftarrow \text{لو } ٣\text{س} = ٤ \Leftarrow \text{س} = \frac{٤}{٣}$$

$$\text{س.ص} = \frac{٤}{٣} \cdot \frac{٣}{٤} = ١ \text{ وهو المطلوب.}$$

٢-٤-١: معكوس المصفوفة الجمعي:

تعريف (١-١٢):

لتكن لدينا المصفوفة $A = [a_{ij}]$ فإننا نقول للمصفوفة $A^{-1} = [a_{ji}^{-1}]$ بالمصفوفة العكسية بالنسبة لعملية الجمع للمصفوفة A بحيث $A + A^{-1} = 0$ (١)

ولإيجاد المعكوس الجمعي للمصفوفة A نقوم بضرب كل عنصر من عناصر A في -1

مثال (١-١٥): إذا كان لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ أوجد

معكوس المصفوفة الجمعي.

الحل: كما سبق وأن ذكرنا أنه لإيجاد معكوس المصفوفة الجمعي

نضرب جميع عناصر المصفوفة A في -1 ليصبح: $A^{-1} = \begin{bmatrix} ٢- & ٤- \\ ٣- & ١- \end{bmatrix}$ وهذا هو

معكوس A الجمعي.

٣-٤-١: عملية الطرح على المصفوفات:

تعريف (١-١٣):

لتكن المصفوفتان $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ من الرتبة $n \times m$



فإن الفرق بين المصفوفتين ب، أ ما هو إلا مجموع المصفوفة أ مضافاً إليها معكوس المصفوفة الجمعي للمصفوفة ب وبصيغة الرموز فإن:

$$A - B = A + (-B) = [A_{ij}] - [B_{ij}] = [A_{ij} - B_{ij}]$$

مثال (١٦-١): إذا كان لدينا المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1- & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2- \end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد ب-أ.

الحل:

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 1- & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5- & 1 \\ 6- & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6- & 4- & 1- \\ 7- & 3- & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1- & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

نظرية (١-١): إذا كان لدينا المصفوفات ٠، ج، ب، أ لها نفس الرتبة وتحقق الخصائص التالية:

$$(1) A + B = B + A$$

$$(2) A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$(3) A + 0 = 0 + A = A$$

$$(4) A + (A-) = (A-) = A$$

فإن مجموعة المصفوفات المكونة لهذه المصفوفات وعملية الجمع تشكل زمرة إبدالية.

تعريف (١٤-١):

لتكن $K \ni C$ ، $A = [a_{ij}]$ فإنه يقال $K = A$ إذا كان:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = K$$

أي أنه لضرب مصفوفة في عدد فإننا نقرب كل عنصر في A العدد K .

مثال (١٧-١): إذا كان لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد ناتج $3A$.

$$\text{الحل: } 3A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot 3$$

ملاحظات:

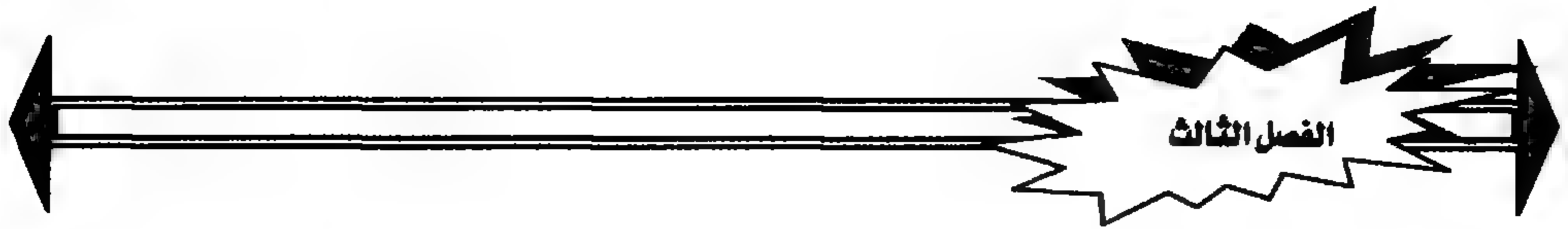
(١) ليكن لدينا المصفوفة $A = [a_{ij}]$ والصفر عدد حقيقي فإنه ينتج

$$0 \cdot A = [0] = [0 \cdot a_{ij}] = [0] \cdot A = 0 \cdot A = 0$$

(٢) لجمع مصفوفة مع عدد حقيقي فإننا نضرب العدد الحقيقي بمصفوفة محايدة من نفس الرتبة وناتج الضرب يجمع بالمصفوفة الأصلية.

نظرية (٢-١): لتكن لدينا المصفوفات B ، A وأن لدينا العددين الحقيقيين H ، G فإن:

$$(١) H(A+B) = H \cdot A + H \cdot B \quad (٣) H(A) = (H \cdot A)$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (١٨-١): إذا كان لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ فأوجد $5 + 13$.

الحل:

$$+ \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} 5 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} 3 = 5 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} 3$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 17 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

مثال (١٩-١): إذا كان لدينا المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

فأوجد قيمة $5B - 13A$ ؟

الحل:

$$+ \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 21 & 12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} 5 - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} 3 = 5B - 13A$$

$$\begin{bmatrix} 31 & 3 & 2 \\ 16 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 5 \\ 5 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (٢٠-١): أوجد قيم s و v لتحقق المعادلة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \text{ صل } - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} s$$

الحل: نجد ناتج حواصل الضرب على النحو التالي:

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2s & 2s \\ -s & -s \end{bmatrix} \text{ ومن تساوي المصفوفتان نجد أن: } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s & 2s \\ -s & -s \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2س - 4ص \\ -س - 7ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$2س - 4ص = 2$$

$$-2س - 14ص = 10$$

$$2س - 4ص = 2$$

$$2(-س - 7ص) = 10$$

$$2س - 4ص = 2 \iff 2س - 4ص = 2 \iff 2س - 4ص = 2$$

$$2س = 6 \iff س = 3$$

وبالتعويض عن قيمة ص = 1 في أحد المعادلتين وحل المعادلة نجد قيمة

س.

$$س + ص = 1 + 3 = 4 \iff س + ص = 4$$

$$لهذا فإن 18ص = 18 \iff ص = 1$$

(١-٤-٤) حاصل ضرب مصفوفتين (Product of two matrices):

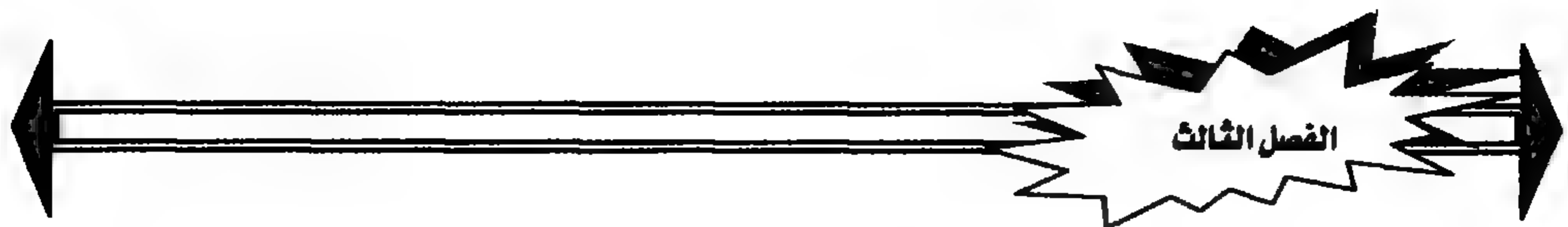
تعريف (١-١٥):

إذا كان لدينا المصفوفة أ من الرتبة ن × م والمصفوفة ب من الرتبة ل × ن

فنسمي المصفوفة جـ = [جـ_{ij}] الناتجة من حاصل ضرب المصفوفة

أ = [أ_{ij}] في المصفوفة ب = [ب_{ij}] والتي تنتج من العلاقة التالية:

$$جـ_{ij} = \sum_{k=1}^n أ_{ik} ب_{kj} = أ_{i1} ب_{1j} + أ_{i2} ب_{2j} + \dots + أ_{in} ب_{nj}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$



$j = 1, 2, \dots, l$

وعليه فإن: $[أ\ j\ z] \times [ب\ j\ z] = [ج\ j\ z] \times م$

أو $ج = ب.أ$

وعليه فإننا عند ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى فإننا نضرب عناصر الصف الأول في عناصر العمود الأول المقابلة ثم جمع نواتج حاصل الضرب.
ملاحظة: عند عملية الضرب فإنه يجب أن يتساوى عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مع عدد صفوف المصفوفة الثانية.

مثال (٢١-١):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = ب \quad \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = أ$$

الحل:

$$أ. ب = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 1 & 13 \\ 16 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = ب \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = أ$$

والمطلوب: إيجاد أ.ب

$$\begin{bmatrix} 22 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 0 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = أ$$



مثال (٢٣-١): إذا كان لدينا المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B =$

$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ أوجد $A \cdot B$ ، $B \cdot A$ وماذا تستنتج؟

الحل:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+4 & 3+2 \\ 4+2 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+2 & 4+1 \\ 6+2 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \text{ نلاحظ أن } A \cdot B \neq B \cdot A$$

ملاحظة:

- (١) ضرب المصفوفات لا يحقق خاصية الإبدال.
- (٢) ضرب المصفوفة في المصفوفة المحايدة يعطي المصفوفة الأصلية. وعليه فإن المصفوفة المحايدة لا تؤثر في عملية الضرب.

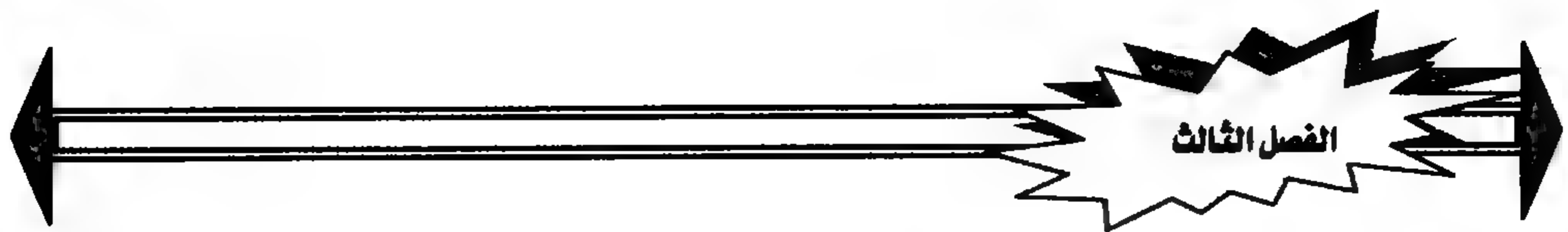
مثال (٢٤-١):

$$\text{إذا كان لدينا المصفوفتان } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{،}$$

أوجد $I \cdot A$ وماذا تستنتج؟

$$\text{الحل: } I \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = A$$

أي أننا نستنتج أن المصفوفة لم تتأثر من عملية الضرب.



مثال (٢٥-١):

$$\text{إذا كان } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ ب } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ أوجد } B.A$$

$$\text{الحل: } A.B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: إذا كان لدينا مصفوفتين قطريتين فإن حاصل ضرب هاتين المصفوفتين هو حاصل ضرب العناصر المتقابلة على القطرين وباقي العناصر صفراً.

نظرية (٣-١):

إذا كان لدينا مصفوفتان ب، أ فإن:

(١) إذا كان $A.B = 0$ فليس بالضرورة أن يكون $A=0$ أو $B=0$.

(٢) إذا كان $A_{m \times n}$ ، $B_{n \times l}$ ، $C_{l \times k}$ = $A(B.C) = (A.B)C$

(٣) إذا كان لدينا المصفوفتين $B_{m \times n}$ ، $A_{n \times m}$ وكذلك $C_{n \times l}$ فإن $(A+B).C = A.C + B.C$

(٤) إذا كان $C_{m \times n}$ وكان $A_{n \times l}$ ، $B_{l \times m}$

(٥) إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة $n \times m$ ، المصفوفة ب من الرتبة $l \times n$ وكان ك، ر \Rightarrow ح فإن

$$A(K.B) = (A.K).B \quad B.(A.K) = (B.A).K$$

$$B.(K.A) = (B.K).A$$



(٦) إذا كان $0 = A$ ، $A \cdot B = A$ فقد لا يكون $B = A$

مثال (٢٦-١): إذا كان لدينا

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ أوجد } B \cdot A?$$

الحل:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 4 \cdot (1-) & 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \\ 0 \cdot 4 + 0 \cdot (1-) & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أنه على الرغم من أن كلا من $B \neq A$ ، $0 \neq A$ إلا أن $B \cdot A = 0$

$$\text{مثال (٢٧-١): لتكن } A = \begin{bmatrix} 1- & 2- & 1- \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1- & 0 \\ 2 & 1- \\ 1 & 2- \end{bmatrix}$$

جـ = $\begin{bmatrix} 2- & 2 & 1- & 1- \\ 2 & 1 & 0 & 1- \end{bmatrix}$ والمطلوب إيجاد جـ . (ب.أ)، أ (ب.جـ) ثم ماذا تستنتج؟

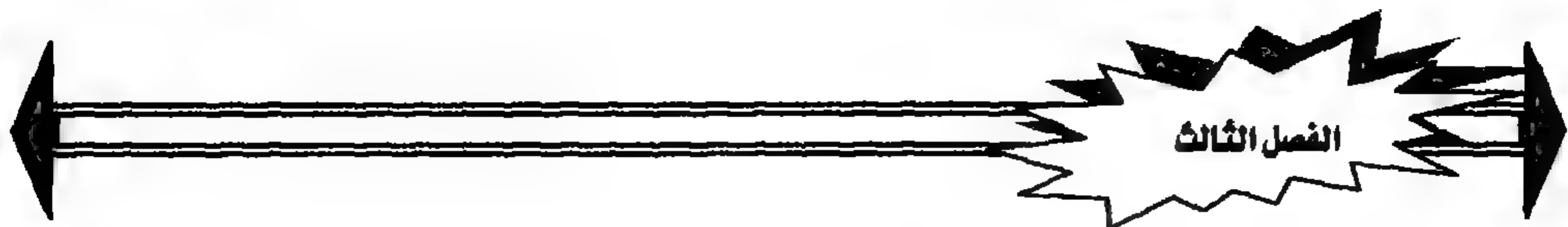
الحل:

نبدأ بإيجاد

$$A \cdot B = \left(\begin{bmatrix} 1- & 0 \\ 2 & 1- \\ 1 & 2- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1- & 2- & 1- \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = B \cdot A$$

= (ب.أ) جـ =

$$\begin{bmatrix} 12- & 6- & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2- & 2 & 1- & 1- \\ 2 & 1 & 0 & 1- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1- & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\text{ب. ج} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{أ. (ب. ج)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نستنتج أن (ج.ب) . أ = ج. (ب.أ) أي أن ضرب المصفوفات يحقق الخاصية التجميعية.

مثال (٢٨-١):

لتكن $\text{ب} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $\text{أ} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، أوجد المصفوفة ج التي تحقق العلاقة
 $\text{أ. ج} = \text{ج} + \text{ب}$

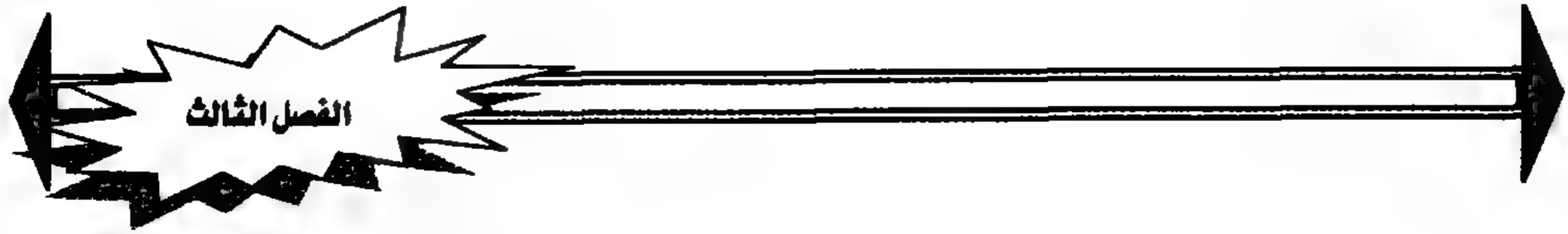
الحل:

بالنظر للطرف الأيمن نلاحظ أن رتبة المصفوفة ب هي 2×1 وحتى يمكن جمعها مع المصفوفة ج لا بد أن تكون رتبة المصفوفة ج نفس رتبة المصفوفة ب

أي أن رتبة المصفوفة ج هي 2×1 أيضاً وعليه سنفرض أن: $\text{ج} = \begin{bmatrix} 1 \\ \text{ب} \end{bmatrix}$

$$\text{أ. ج} = \text{ج} + \text{ب} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \text{ب} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \text{ب} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 + 1 \\ \text{ب} + 12 \end{bmatrix}$$





$$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & b \end{bmatrix} = \text{ومن تساوي المصفوفتين فإن:}$$

$$6 + 1 = 3 + b \iff 6 = 3 + b \iff b = 3$$

$$12 + 1 = 2 + b \iff 12 = 2 + b \iff b = 10 \text{ وعليه فإن}$$

$$\text{المصفوفة ج} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{مثال (١-٢٩): حل المعادلة المصفوفة التالية } S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 4$$

الحل: تنقل الثوابت في طرف ونبقي المجهول في طرف آخر:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 4$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(١-٥) قوى المصفوفة المربعة Power of Square Matrix

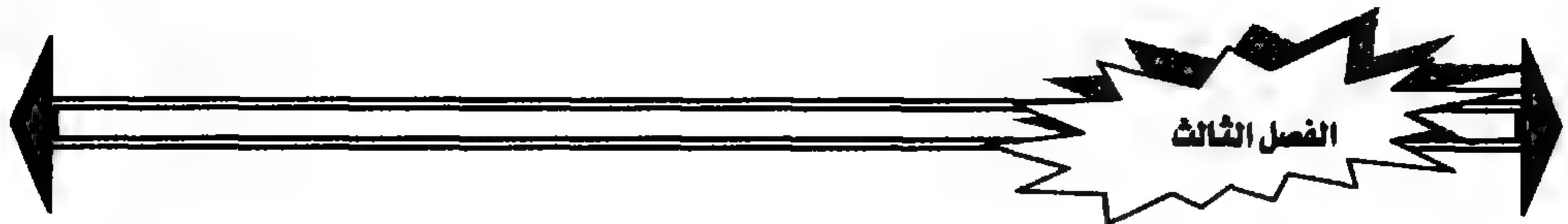
تختلف قوى المصفوفات عنها في الأعداد الحقيقية وسنرى ذلك من خلال الأمثلة ونبدأ بإعطاء التعريف التالي:

تعريف (١-١٦):

إذا كانت المصفوفة أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن وكان ك $\in \mathbb{Z}^+$ فإن

قوى المصفوفة بالنسبة لعملية الضرب يمكن كتابتها على الصورة التالية:





$$I = {}^1I, {}^1I = {}^2I, {}^2I = {}^3I, \dots, {}^kI = {}^{k+1}I, {}^{k+1}I = {}^{k+2}I, \dots$$

مثال (١-٣٠): إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد A^{1986}

الحل:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+9 & 6+0 \\ 6+0 & 9+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26+18 & 39+0 \\ 12+27 & 18+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 39 \\ 39 & 18 \end{bmatrix}$$

ولكون:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^nI = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

فإن:

$$A^{1986} = (A^2)^{993} = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}^{993} = \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \dots \cdot \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \quad (993 \text{ times})$$

مثال (١-٣١): إذا كان لدينا $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ أوجد A^{12}

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 1+2 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 2+6 \\ 3+5 & 3+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$$

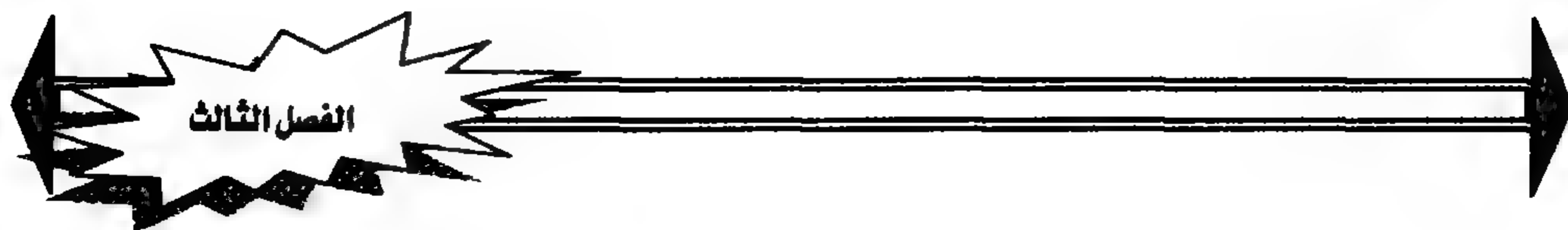
$$A^{12} = (A^3)^4 = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}^4$$

مثال (١-٣٢): إذا كانت عناصر المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} s & s \\ s & s \end{bmatrix} \quad \text{أعداداً موجبة وكان مجموع عناصر المصفوفة } A \text{ يساوي}$$

٩٨ أوجد $s + s$





$$\begin{bmatrix} 2s & s+2v \\ 2s & s+2v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & s \\ s & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s & s \\ s & s \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$98 = s^2 + 2sv + 2sv + s^2 + 2sv + 2sv$$

وعليه فإن مجموع الحدود:

$$2(s^2 + 2sv + s^2) = 98 \iff 4(s+v)^2 = 98$$

$$49 = (s+v)^2 \iff$$

$$7 = s + v \iff$$

مثال (٣٣-١): إذا كان:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2n \end{bmatrix} = 1 \cdot (1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{أثبت أن}$$

الحل: ستثبت ذلك باستخدام طريقة الاستقراء الرياضي وذلك بإتباع الخطوات السابقة.

أولاً: نثبت صحة العبارة ل(١) أي عندما $n = 1$

$$1(1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = 1 \iff 1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ أي أن العبارة صحيحة عندما } n = 1.$$

$$\text{ثانياً: نفرض صحة العبارة } n = k \text{ أي أن } 1(k) = \begin{bmatrix} 0 & 2k \\ 2k & 2 \cdot k \end{bmatrix}$$



ثالثاً: نثبت صحة العبارة عندما

$$\begin{bmatrix} 0 & 2^{1+k} \\ 2^{1+k} & 2^k(1+k) \end{bmatrix} = 1^{1+k} \text{ أي أن } 1+k = n$$

لذا نضرب ما فرضناه في ثانياً ولكلا الطرفين في أ أي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2^{1+k} \\ 2^{1+k} & 2^k(1+k) \end{bmatrix} = 1^{1+k} \iff \begin{bmatrix} 0 & 2^k \\ 2^k & 2^{1+k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1^k$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2^{1+k} \\ 2^{1+k} & 2^k(1+n) \end{bmatrix} \text{ أي أن العبارة صحيحة عندما } 1+k = n$$

$$\text{مثال (١-٣٤): لدينا } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ وكان ق (س) } = \text{س}^3 - \text{س}^2 + 4$$

وبوضع أ بدلاً من س أوجد المصفوفة ق(أ)

$$\text{الحل: بوضع أ بدلاً من س فإن: ق(أ) = (أ) - (أ)^2 + 4(أ)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2 & 2-1 \\ 0+1 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1^2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (أ) \quad \text{ق}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

٦-١ مبدول المصفوفة Transpose of Matrix

لقد سبق وأن تعرضنا إلى مفهوم المبدول للمصفوفة من خلال أنواع المصفوفات والآن سنتوقف عند هذا المفهوم مرة أخرى لتتناول الأمثلة والخصائص ونبدأ بإعطاء التعريف التالي:

تعريف (١-١٧):

يقال للمصفوفة الناتجة من تبديل صفوف المصفوفة $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ بأعمدة المصفوفة بمبدول المصفوفة A' وسنرمز لها بالرمز $A' = [a'_{ij}]_{n \times m}$ أو قد نرمز للمبدول بالرمز A' .

مثال (١-٣٥):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد مبدول (أ)، مبدول (ب) أو A' ، B' .

الحل:

$$\text{حسب التعريف فإن مبدول (أ)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{مبدول ب} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

نظرية (١-٤):

(١) إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $n \times m$ فإن $A' = \text{مبدول (مبدول أ)}$

(٢) إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $n \times m$ ؛ $k \in \mathbb{C} \iff (kA)' = kA'$

أو مبدول $(kA) = k \text{ مبدول (أ)}$.

(٣) إذا كان B ، A مصفوفتان من الرتبة $n \times m$ فإن مبدول $(A + B) = \text{مبدول (أ)} + \text{مبدول (ب)}$.

(٤) إذا كان لدينا المصفوفتان $A_{n \times m}$ من الرتبة $n \times m$ والمصفوفة $B_{m \times n}$ من الرتبة

$n \times n$ فإن مبدول $(AB) = \text{مبدول (ب)} \times \text{مبدول (أ)}$.

ملاحظة: لتكن المصفوفة $n \times n$ فإنه يقال للمصفوفة التي فيها مبدول $(1) = 1$ بالصفوفة المتماثلة **Symmetric Matrix**

أما إذا كان $1 = -$ مبدول (1) فإننا نقول للمصفوفة 1 بالصفوفة المتماثلة عكسياً **Anti – Symmetric Matrix** والآن سنتناول أمثلة توضيحية لذلك.

مثال (١-٣٦): إذا كان $1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

تحقق من صحة الخاصية مبدول $(1 + 1) =$ مبدول $(1) +$ مبدول (1)

الحل:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 1 = 1 + 1$$

$$\text{مبدول } (1+1) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \text{مبدول } (1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \text{مبدول } (1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow \text{مبدول } (1) + \text{مبدول } (1) = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن مبدول $(1 + 1) =$ مبدول $(1) +$ مبدول (1) وهو المطلوب.

مثال (١-٣٧): إذا كان لدينا المصفوفتان

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ ب } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ أثبت أن مبدول } (1.1) = \text{مبدول } 1. \text{ مبدول } 1$$

الحل:

$$1.1 = \begin{bmatrix} 20+6 & 16+2 \\ 10+0 & 12+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 18 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 1.1$$

$$\begin{bmatrix} 26 & 14 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1- \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \text{مبدول (ب)} \quad \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 15 & 36 \end{bmatrix} = \text{مبدول (أ.ب)}$$

$$\begin{aligned} \text{مبدول (أ)} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow \text{مبدول (ب). مبدول (أ)} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 15 & 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+0 & 16+2- \\ 15+0 & 2+6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مثال (٣٨-١): إذا كان لدينا

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 17 \end{bmatrix} \text{ ب } \begin{bmatrix} 17 & 29 \\ 10 & 17 \end{bmatrix} \text{ وعلى اعتبار أن:}$$

أ. مبدول (أ) = ب أوجد قيمة الزوج المرتب (س، ص)

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+1 & 25+1 \\ 10+1 & 17+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 26 \\ 11 & 18 \end{bmatrix}$$

ومن تساوي المصفوفتان نستطيع كتابة:

$$17 = 25 + 2 = 25 + 1 + 1 \quad 2 = 10 + 1 = 10 + 1 + 1$$

$$10 = 17 + 2 = 17 + 1 + 1 \quad 1 = 10 + 1 = 10 + 1 + 1$$

وهنا وحتى تتحقق المعادلة الأخيرة فإن القيمة الموجبة لكل من س، ص هي التي فقط تحقق المعادلة الأخيرة لذا فإن الحل م (٣، ٢) هو الحل الوحيد.

أمثلة إضافية:

مثال (٣٩-١):

لدينا المصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{أ} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{ب} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{ج}$$

أوجد أ ج + ب ج

الحل: أ ج + ب ج = (أ + ب) ج

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} =$$

مثال (٤٠-١): لدينا المصفوفات التالية

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{أ} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{ب} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{ج} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \text{د}$$

أوجد ج . (ب.أ)، مبدول (ج) . (مبدول (ب) . مبدول (أ))

الحل:

$$\begin{aligned} \text{أ.ب} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ \text{ج.د} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{مبدول (ج)} \leftarrow \text{ج} \leftarrow \text{ج} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{ج (ب . أ)}$$

$$= \text{مبدول (أ) . مبدول (ب) . مبدول (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{مبدول} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{مبدول} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

مثال (٤١-١): على اعتبار أن:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{س} = 2, \text{ص} = 1$$

$$\leftarrow \text{س} + \text{ص} = 2 + 1 = 3$$

مثال (٤٢-١): لدينا المصفوفتان: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{ب}$ $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

وعلى اعتبار أن أ. مبدول (أ) = ب أوجد قيمة $\frac{س}{ص}$ ؟

الحل: أ = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ مبدول (أ) = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

أ. مبدول (أ) = ب $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+س & 1+ص \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

ومن تساوي المصفوفتين $1 + س = 6$ ، $1 + ص = 10$ ، $2 = 4$

وبحل المعادلات نجد أن $س = 5$ ، $ص = 9$ $\frac{س}{ص} = \frac{5}{9}$

لأننا هنا نأخذ فقط قيم س، ص الموجبة أو السالبة حتى تحقق المعادلة

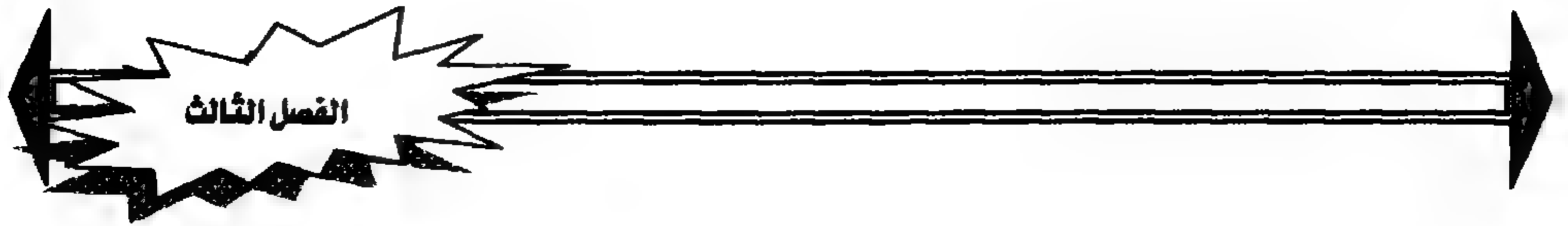
الثالثة.

مثال (٤٣-١): بالاستفادة من المتطابقات المثلثية احسب قيمة

جتاس $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

الحل: جتا $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{جاس جاس} & \text{جاس جاس} \\ \text{جاس جاس} & \text{جاس جاس} \end{bmatrix} \leftarrow$$

مثال (٤٤-١): احسب قيمة س، ص التي تحقق المعادلة التالية:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3س + 1 \\ 0ص + 5س + 2 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3س + 1 \\ 5س + 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3س \\ 7س \end{bmatrix} \leftarrow$$

$$3س = 6, 7س = 21 \Rightarrow س = 2, 3 = 3 \Rightarrow (س, ص) = (2, 3)$$

$$(2, 3) =$$



تمارين عامة

س (١) على اعتبار أن $\begin{bmatrix} ٢س & ص & ع- \\ ٢س & ص- & ع٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢- & ٦ & ٥- \\ ص & ١١ & ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١- & ٤ & ت \\ ع٣ & ٥ & ع \end{bmatrix}$ أوجد قيمة س + ص.

س (٢) إذا كان $\begin{bmatrix} ١٠ \\ ٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢- \\ ١ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٣س & ٢س- \\ ٣س & ٣س- \end{bmatrix}$ أوجد قيمة ٢.

س (٣) إذا كان $\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ٦ & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ د- & ب \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ أوجد قيمة ب + د

س (٤) إذا كان س $\begin{bmatrix} ٣- \\ ٢- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ص \\ س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥- \\ ٤ \end{bmatrix}$ أوجد قيمة س + ص.

س (٥) أوجد المصفوفة س التي تحقق المعادلة س - ٣ $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ١- \end{bmatrix} + ٥ = ٠$

س (٦) إذا كان ٢٢ + ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{bmatrix} = ١ \begin{bmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{bmatrix} = ١ \begin{bmatrix} ٢ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ أوجد مجموع أ + ب + ج.

س (٧) لدينا المصفوفات

$$١ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$ب = \begin{bmatrix} ١- & ١ \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$$

جـ = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ وعلى اعتبار أن $A + B = C$ أوجد قيمة س؟

س٨) إذا كان $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ أوجد قيمة ص - س.

س٩) لدينا المصفوفات التالية جـ = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = B$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = D$

أوجد ناتج ما يلي إن أمكن أ. ب، ب. ج، ج. د. ج مع ذكر سبب عدم إمكانية.

س١٠) أوجد قيم س، ص التي تحقق العلاقة التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

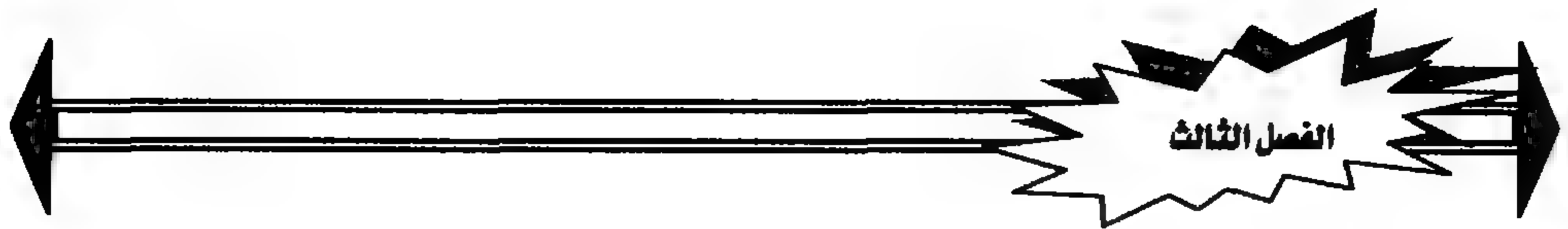
س١١) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة (أ).

س١٢) لدينا المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد أ. ب.

س١٣) لدينا المصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{أوجد أ. ب + ج؟}$$



س١٤) لدينا المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1- \end{bmatrix} = \text{أ}$$

ب = $\begin{bmatrix} 4 \\ 1,0 \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة ج التي تحقق العلاقة أ . ج = ج + ب

س١٥) لدينا المصفوفات التالية:

$$\begin{bmatrix} 1-ص & ٢-ص \\ ٢-ص & ٢ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

ب = $\begin{bmatrix} ٦ & ٢-ص \\ ٦-ص & ٣ \end{bmatrix}$ إذا كان مبدول $\begin{bmatrix} : & : \\ : & : \end{bmatrix} = ٠$ إيجاد قيمة س.

س١٦) لدينا المصفوفات ج = $\begin{bmatrix} ٣٢,٣ & ١٨٧ \\ ٢ & ٨,٤ \end{bmatrix}$ أوجد حاصل ضرب س ص والذي يحقق المتساوية أ . ب = ج حيث س، ص ∈ ح.

س١٧) لدينا المصفوفتان

$$\begin{bmatrix} ١ & ج٢٣ & ج٣٣ \\ ٠ & ج٣٣ & ج٣٣ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

ب = $\begin{bmatrix} ج٣٣ \\ ج٣٣ \\ ١- \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة مبدول (أ . ب)؟

س١٨) متتالية حسابية حدودها مصفوفات مربعة من الرتبة ٢×٢ حدها الثالث

$$\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ : & ٣ \end{bmatrix} = ٣٧ \quad \begin{bmatrix} ١ & ٤- \\ ٨- & ٧ \end{bmatrix} = ٧٧$$



أوجد أساس هذه المتتالية؟

س١٩) إذا كان الحد الأول من متتالية حسابية $a = 1$ وكان أساسها $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ أوجد الحد الرابع من هذه المتتالية؟

س٢٠) لدينا المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = B$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 14 & 2 \end{bmatrix} = C$$

وعلى اعتبار أن $3A - 12B = C$ أوجد قيمة $s + t$ ؟

أسئلة موضوعية

س (١) لدينا المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن قيمة $A \cdot B + C$ ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 3 & 16 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 8 & 19 \\ 30 & 32 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 19 \\ 12 & 15 & 12 \end{bmatrix}$

س (٢) لدينا المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة ج التي تحقق $A \cdot B = C$ هي

(أ) $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \text{س-ص} \\ 2 & \text{ص-ص} \end{bmatrix} = \text{س (3) لدينا المصفوفات التالية أ}$$

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{س-ص} & 2 \\ 3 & \text{ص-ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ وإذا كان مبدول (ب) - (أ) = 0}$$

فإن قيمة س:

(أ) 4 (ب) $\frac{7}{2}$ (ج) 3 (د) $\frac{5}{2}$ (هـ) 2

س (4) لدينا المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$$\text{ب} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ فإن قيمة مبدول (أ . ب) هي:}$$

(أ) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

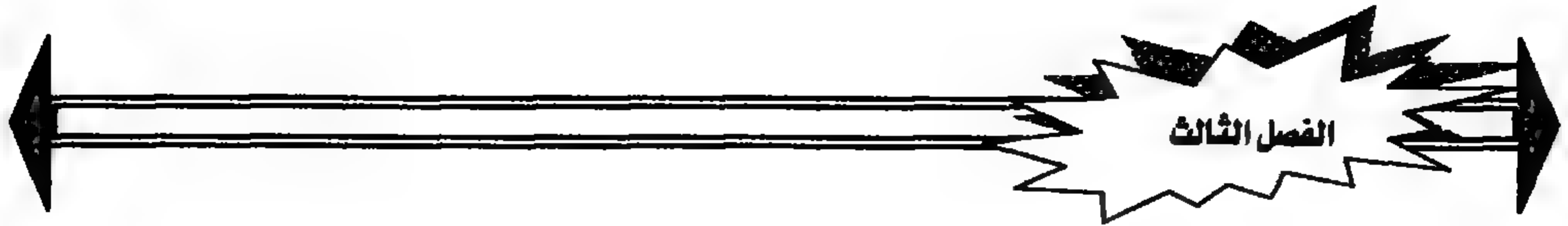
س (5) لدينا المصفوفتين:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & \text{جاس} & \text{جاس} \\ 2 & \text{جاس} & \text{جاس} \end{bmatrix} \text{ ب} = \begin{bmatrix} \text{جاس} \\ \text{جاس} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ إن قيمة المصفوفة س التي}$$

تحقق العلاقة أ . مبدول (س) = ب هي:

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



س٦) لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ فقد كان مجموع عناصر المصفوفة A^n

يساوي ١٦ فإن قيمة n هي:

- أ) ٨ ب) ١٠ ج) ١٢ د) ١٤ هـ) ١٦

س٧) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A^k = \begin{bmatrix} 512 & 0 \\ 0 & 512 \end{bmatrix}$ فإن قيمة k هي:

- أ) ٨ ب) ٩ ج) ١٠ د) ١١ هـ) ١٢

س٨) لدينا المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة A^{10} هي

- أ) $2^9 \cdot A$ ب) $2^{10} \cdot A$ ج) $2^{18} \cdot A$

- د) $3^9 \cdot A$ هـ) $3^{10} \cdot A$

س٩) إن رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ هي

- أ) ٤ ب) ٣ ج) ٢ د) ١ هـ) ٠

س١٠) حتى تكون رتبة المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 12 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ تساوي ١ فإن

قيمة s هي:

- أ) $6 -$ ب) $3 -$ ج) $2 -$ د) ٢ هـ) ٣



س ١١) إذا كان $ص < ٠$ ، $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

أ. مبدول (أ) $= \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢٦ & ٣ \end{bmatrix} \Leftarrow ٣ + ص =$

١ (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥ (هـ)

س ١٢) لدينا $أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ب $= \begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \end{bmatrix}$ أ. مبدول

(س) = ب فإن قيمة المصفوفة س هي:

١ (أ) $[٢ \quad ٣-]$ ب $\begin{bmatrix} ٢- \\ ٣ \end{bmatrix}$

ج $[٢- \quad ٣]$ د $[٣ \quad ٢-]$ هـ $\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٣ & ٣- \end{bmatrix}$

س ١٣) لدينا المصفوفة أ $= \begin{bmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{bmatrix} \Leftarrow ١٠٢ =$

١ (أ) ١٠٢ ب ١٠٢

ج ١٠٢ د ١٠٣ هـ ١٠٣

س ١٤) لدينا المصفوفة $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ، $ص \in \mathbb{N}$ $\Leftarrow ٣ + ٤٠ =$

١ (أ) ١- (ب)

ج ١- (د) ١٢ (هـ)

س ١٥) إذا كان $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ ق (س)} = \text{س}^2 - 3 + 3 \text{ س} = \text{ق (أ)} \Leftarrow$

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ (هـ) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

س ١٦) باستخدام المصفوفات التالية:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ فإن نظام المعادلات الناتج هو

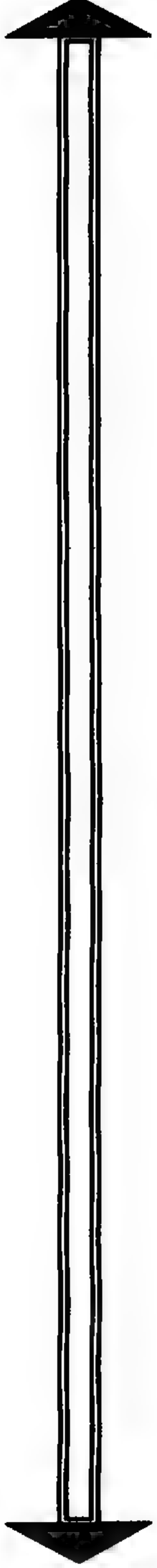
(أ) $\text{س}^2 + \text{ص} = 1$ ، $\text{س} + \text{ص} = 5$

(ب) $\text{س}^2 + \text{ص} = 1$ ، $\text{س} - 3\text{ص} = 5$

(ج) $\text{س}^2 - \text{ص} = 1$ ، $\text{س} + 3\text{ص} = 5$

(د) $\text{س}^2 + \text{ص} = 1$ ، $\text{س}^2 + \text{ص} = 1$

(هـ) $\text{س}^2 + \text{ص} = 1$ ، $\text{س} - 3\text{ص} = 5$



المتتاليات والمتسلسلات العددية

الفصل الرابع

المتتاليات والمتسلسلات العددية

ستعرف الآن أبسط الكيانات التحليلية في علم التحليل الرياضي والتي لها تطبيقات مختلفة في كثير من الفروع الرياضية والفيزيائية والكيميائية.

تعريف المتتالية العددية:

هي تطبيق منطلقة مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} ومجموعة أخرى. ونقول أن المتتالية العددية حقيقية إذا كان مستقرها هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} ويمكن ترميزها عندئذ بالشكل $\{a_n\}$ أو a_n أما إذا كانت هذه المتتالية مستقرها مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} = التخييلية فإننا نسميها متتالية عقدية أو تخيلية ونكتب $a_n \in \mathbb{C}$: ستعامل في هذا الكتاب مع متتاليات عددية حقيقية فقط ويتم تعريف المتتالية بواسطة ثلاثة طرق أساسية:

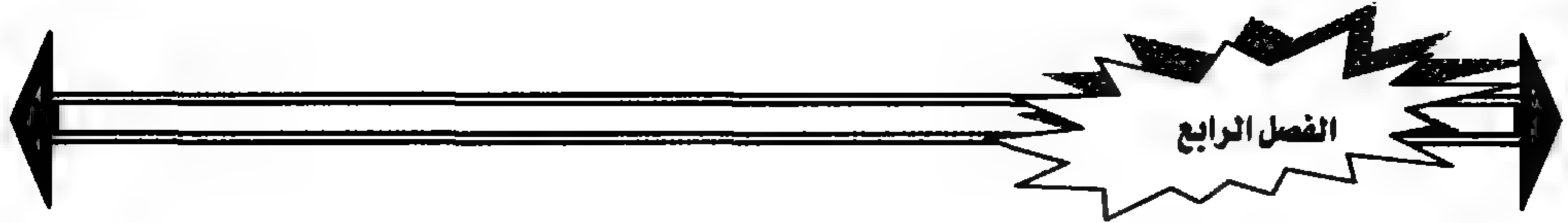
١- طريق الحد النوني- الحد العام- في هذه الطريقة تعطى قاعدة ربط

للمتتالية مثل $a_n = \frac{n}{n+1}$ وعندها تصبح مجموعة قيم هذه المتتالية:

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

٢- طريقة السرد: تعطى بهذه الطريقة المتتالية على شكل مجموعة مرتبة مثل:



$\{a_n\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$ وهي متتالية الأعداد الأولية.

ومن الجدير بالذكر أنه لا يمكن في الحالة العامة كتابة هذه المتتالية بطريقة الحد النوني.

٣- طريق الحد الضمني: تعطى بهذه الطريقة المتتالية بواسطة علاقة بين حدود لاحقة وحدود سابقة، مثال $a_{n+1} = a_n + 2$.

في هذه الحالة وحتى نستطيع التعريف عن المتتالية بشكل كامل لا بد من وضع حدود ابتدائية معروفة مثل a_1 فيصبح لدينا ما يلي:

إذا فرضنا $a_1 = 2$ عندئذ نستطيع استنتاج حدود المتتالية جميعها من قاعدة الحد الضمني

$$a_2 = 2 + 2 = 2 + a_1 = 4$$

$$a_3 = 2 + 3 = a_2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$a_4 = 2 + 4 = 2 + a_3 = 6 + 2 = 8$$

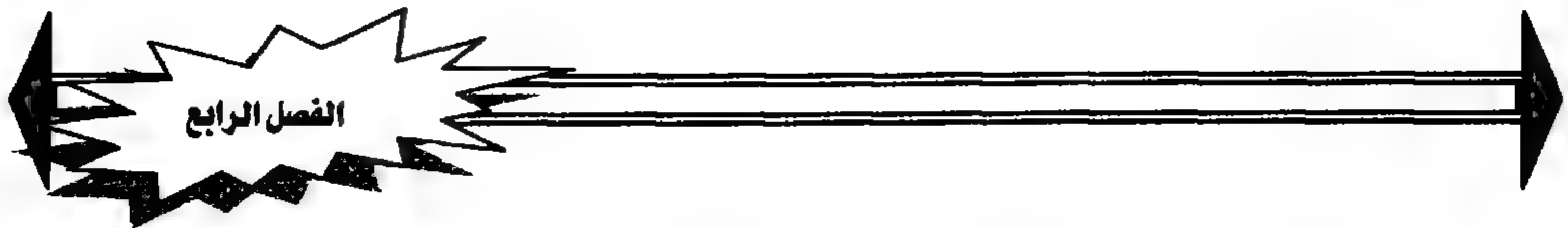
وهكذا وبالتالي $\{a_n\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ وهي متتالية الأعداد الزوجية ويمكن في الحالة العامة إيجاد حد نوني لهذه المتتالية بطرق حسابية بسيطة.

متتاليات خاصة:

أولاً: المتتالية الحسابية:

أ- تعريف: تعرف المتتالية الحسابية بأنها المتتالية التي يتج كل حد فيها عن





الحد الذي قبله بإضافة عدد ثابت ونقول عن هذا العدد الثابت بأنه أساس المتتالية الحسابية ونرمز له بـ جـ.

وبالتالي كأننا نعرف المتتالية الحسابية بقاعدة ضمنية وذلك بالشكل:

$$a_{n+1} = a_n + c$$

الآن إذا أردنا حساب الحد النوني لهذه المتتالية عندئذ نكتب: $a_2 = a_1 + c$

$$a_3 = a_2 + c = a_1 + 2c$$

$$a_4 = a_3 + c = a_1 + 3c$$

وهكذا حتى نصل إلى $a_n = a_1 + (n-1)c$

وبالتالي حتى تكون هذه المتتالية معرفة تعريفاً وحيداً يجب معرفة الحد

الأول a_1 وأساس هذه المتتالية جـ

مثال: أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية المعطاة بالشكل:

$$\{a_n\} = \{3, 5, 7, \dots\}$$

الحل: بملاحظة أن جـ = $a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$ ولدينا أيضاً $a_3 = 7$ عندئذ فإن

$$a_n = a_1 + (n-1)c = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$$

وهذه المتتالية تسمى متتالية الحدود الفردية.

ب- تعريف متتالية المجاميع الجزئية للمتتالية الحسابية: ونرمز لها بـ جـ_ن وتعرف بالشكل:

$$J_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$



الآن إذا أردنا كتابة حد عام لهذه المتتالية نلاحظ أن:

$$ج_ن = ١ + (ج + ١) + + (١ - ن) + ج$$

$$= ١ + [ج + ٢ + + (١ - ن) + ج]$$

$$= ١ + ج + [١ + ٢ + + (١ - ن)]$$

$$الآن من أجل المقدار ب = ١ + ٢ + + (١ - ن)$$

نلاحظ أن:

$$\left\{ \begin{array}{l} ب = ١ + ٢ + + (١ - ن) \\ ب = (١ - ن) + (٢ - ن) + + ١ \end{array} \right. \Leftrightarrow ٢ب = ب + ب$$

$$= ن + ن + + ن$$

$$= ن(١ - ن)$$

$$\text{وبالتالي } ب = \frac{ن(١ - ن)}{٢} \text{ والآن لنعود إلى جن فنجد أن } ج_ن = ١ +$$

$$ج = \frac{ن(١ - ن)}{٢} \text{ وهو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية.}$$

$$\text{ويمكن أيضاً كتابته بالشكل } ج_ن = \left[\frac{ج(١ - ن)}{٢} + ١ \right]$$

مثال: بفرض المتتالية الحسابية التي حدها الأول $١ = ٥$ وأساسها $ج = ٣$ أوجد حدها العام ومجموعها حتى الحد العاشر.

الحل: بملاحظة أن الحد العام يعطى بالشكل $١ + ٣(١ - ن)$

$$\Leftrightarrow ١ + ٣ = ٤$$

والحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لها تعطى بالعلاقة: $ج = ن$
 $[\frac{(1-ن)^3}{2} + 5]$ الآن إذا أردنا المجموع حتى الحد العاشر.

$$ج = ١٠ = [\frac{9 \times 3}{2} + 5] ١٠ = [\frac{37}{2}] ١٠ = 37 \times 5 = 185.$$

ثانياً: المتتالية الهندسية:

أ- تعريف: نعرف المتتالية الهندسية بأنها المتتالية التي يتج كل حد فيها عن الحد الذي قبله بضربه بعدد ثابت ونقول عن هذا العدد الثابت بأنه أساس المتتالية الهندسية ونرمز له بـ $ر$.

وكأننا الآن عرفنا هذه المتتالية بقاعدة ضمنية $ا_{ن+1} = ر \cdot ا_n$

وبالتالي إذا أردنا حساب حداً عاماً لهذه المتتالية نكتب:

$$ا_1 \cdot ر = ا_2 \quad ا_2 \cdot ر = ا_3 \quad ا_3 \cdot ر = ا_4 \quad \dots \quad ا_{ن-1} \cdot ر = ا_n$$

ويجب حتى يكون هذه المتتالية معرفة بشكل كامل أن نعرف أساسها ووحدها الأول $ا_1$.

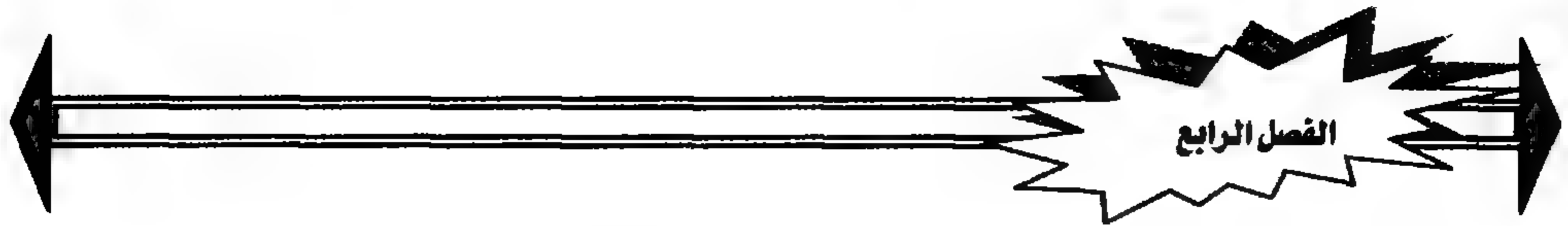
مثال: اكتب الحد العام للمتتالية الهندسية المعطاة بالشكل:

$$\{ا_n\} = \{2, 6, 18, 54\}.$$

الحل: بملاحظة أن

$$ا_2 = 2, \quad ر = \frac{ا_2}{ا_1} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{عندئذ فإن } ا_n = 2 \cdot 3^{ن-1}$$

$ا_n = 2 \cdot 3^{ن-1}$ وهو الحد العام للمتتالية الهندسية.



ب- سنعرّف الآن متتالية المجاميع الجزئية المنتهية للمتتالية الهندسية وسنرمز لها بالشكل σ_n :

$$\sigma_n = 1 + \dots + n$$

$$\sigma_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} \cdot 1$$

$$\sigma_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} \cdot r = r \cdot \Omega(r) + 1$$

الآن إذا ضربنا الطرفين بـ r نجد أن:

$$r \cdot \sigma_n = r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = r \cdot \Omega(r)$$

$$r \cdot \sigma_n - \sigma_n = r^n - 1 \quad \text{الآن من } \Omega(r) \text{ و } \Omega(r)$$

$$\sigma_n (r - 1) = r^n - 1 \Leftrightarrow \sigma_n = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{وأخيراً يمكن كتابتها}$$

بالشكل

$$\sigma_n = \left[\frac{r^n - 1}{r - 1} \right] \cdot 1 \quad \text{أما من أجل } r = 1 \text{ فإن } \sigma_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

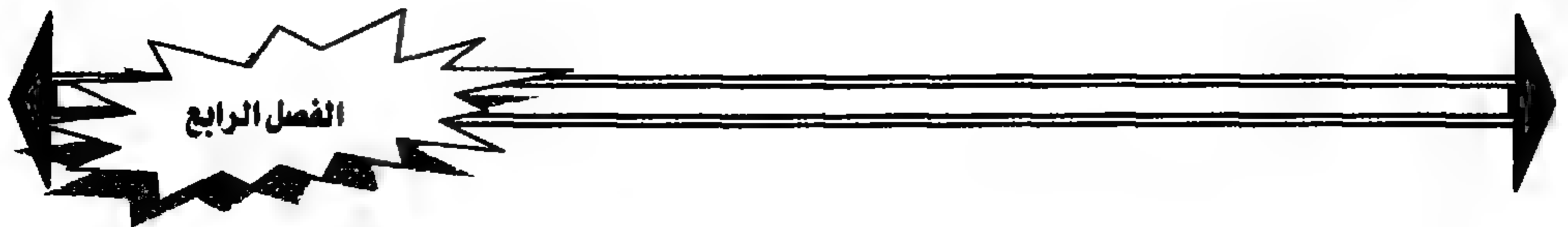
وهو الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه المتتالية.

مثال: بفرض المتتالية الهندسية التي حدها الأول 1 وأساسها 2 أوجد حدها العام ومجموعها حتى الحد العاشر.

$$\text{الحل: بملاحظة أن } \sigma_n = 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} \Leftrightarrow \sigma_n = 2^n - 1 = \sigma_n(2) = 2^n - 1$$

وهو الحد العام لهذه المتتالية.





$$= \left[\frac{n-1}{2-1} \right] \cdot 2 = n \quad \text{نكتب } \sigma_n = 2$$

$$2 - 1 + n = n \quad \Leftrightarrow [1 - 1] \cdot 2$$

ومن أجل مجموعها حتى الحد العاشر نكتب $\sigma_{10} = 2 - 1 + 10 = 11$. 42 = 2 - وهو المطلوب .

المتتاليات المحدودة:

أ- تعريف: نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد مثل M بحيث:

$$E : n = n^0 < n^0 \Leftrightarrow M \geq n$$

مثال: بملاحظة المتتالية $a_n = \frac{n}{1+n} : \{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$ وأيضاً:

$$a_n = \frac{n}{1+n} \geq \frac{1+n}{1+n} = 1 \quad \text{وبالتالي فإن } \{a_n\} \text{ محدودة من الأعلى بالعدد } M = 1$$

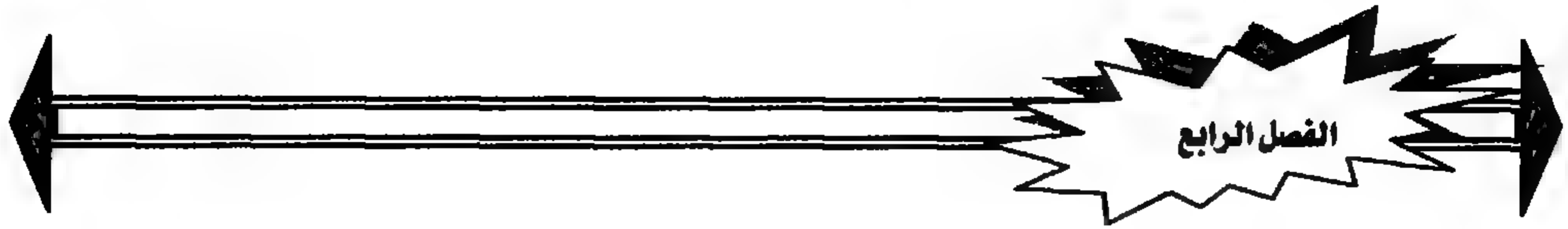
ب- تعريف: نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها محدودة من الأدنى إذا وجد مثل L بحيث:

$$E : n = n^0 < n^0 \Leftrightarrow L \leq a_n$$

مثال: بملاحظة $b_n = \frac{1}{n}$ نلاحظ أن هذه المتتالية محدودة من الأدنى بالصفر لأن

$$b_n = \frac{1}{n} \geq 0$$





ج- تعريف: نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومحدودة من الأدنى ونقول أنها محدودة إذا وجد عدد مثل M بحيث

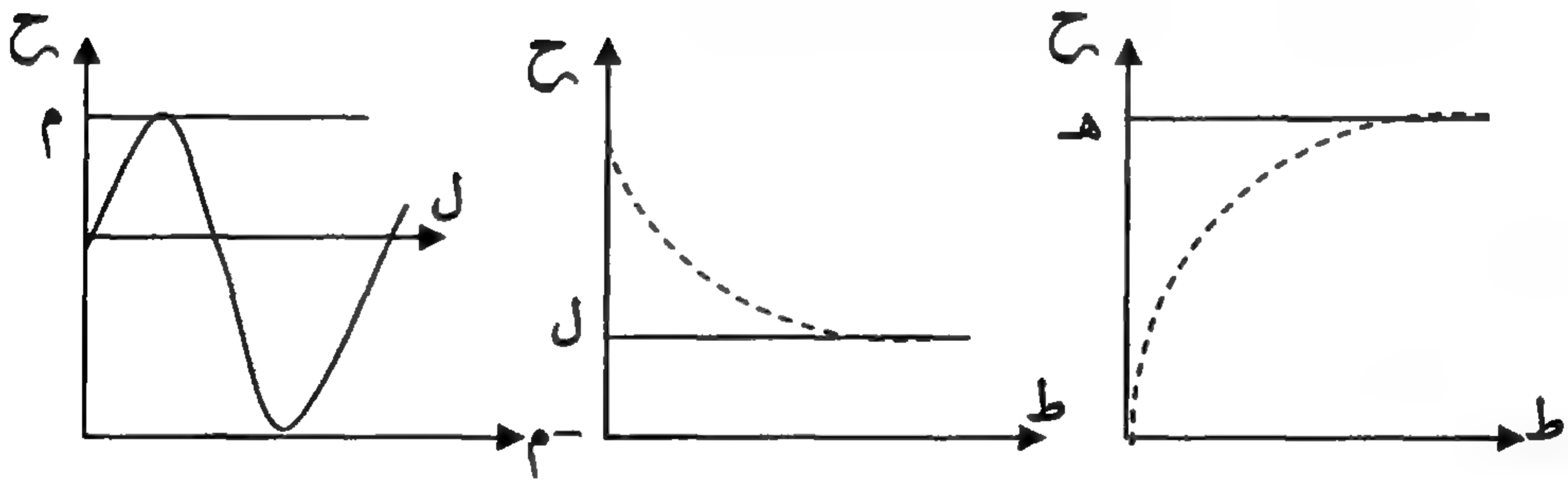
$$E : n < \infty \iff |a_n| \leq M \text{ وبالتالي يصبح لدينا } -M \leq a_n \leq M$$

مثال: المتتالية $a_n = \frac{(1-n)}{n}$ محدودة من الأعلى والأدنى أي محدودة

وذلك لأن

$$1 > a_n > -1 ; 1 > \frac{1}{n} = \left| \frac{(1-n)}{n} \right| = |a_n|$$

التمثيل الهندسي للمتتاليات المحدودة:



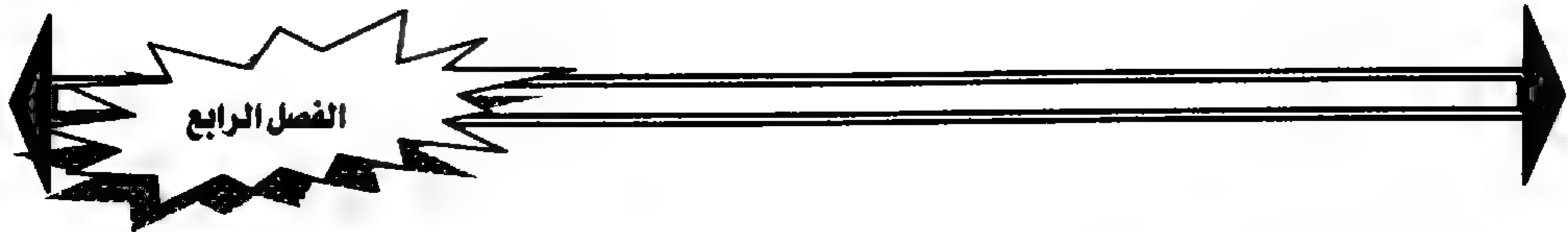
المتتاليات المطردة:

تنقسم المتتاليات المطردة إلى قسمين:

١. المتتاليات المتزايدة: نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها متزايدة إذا كان

$$E : n < \infty \iff a_n \leq a_{n+1}$$





ونقول أنها متزايدة تماماً إذا كان

$$E : n < n+1 \iff a_n < a_{n+1}$$

مثال: بفرض لدينا المتتالية: $a_n = \frac{n^2}{1+n}$

نلاحظ أن $\{a_n\} = \{1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \dots\}$ وأيضاً إذا نظرنا إلى المقدار

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n^2}{1+n} - \frac{(n+1)^2}{1+(n+1)} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{(1+n)(1+n+1)} = \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{(1+n)(1+n+1)} = \frac{-2n-1}{(1+n)(1+n+1)}$$

$$= \frac{-2n-1}{(1+n)(1+n+1)} < 0 \iff a_n - a_{n+1} < 0 \iff a_n < a_{n+1} \text{ والمتتالية متزايدة.}$$

٢- المتتاليات المتناقصة: نقول أن المتتالية $\{a_n\}$ متناقصة إذا كان

$$E : n < n+1 \iff a_n \geq a_{n+1}$$

$$a_n < a_{n+1}$$

مثال: بفرض المتتالية $a_n = \frac{1}{n}$ نلاحظ أن: $a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$= \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{n} = \frac{(n+1) - 1}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} > 0 \iff a_n > a_{n+1} \text{ والمتتالية متناقصة.}$$

المتتاليات المتقاربة:

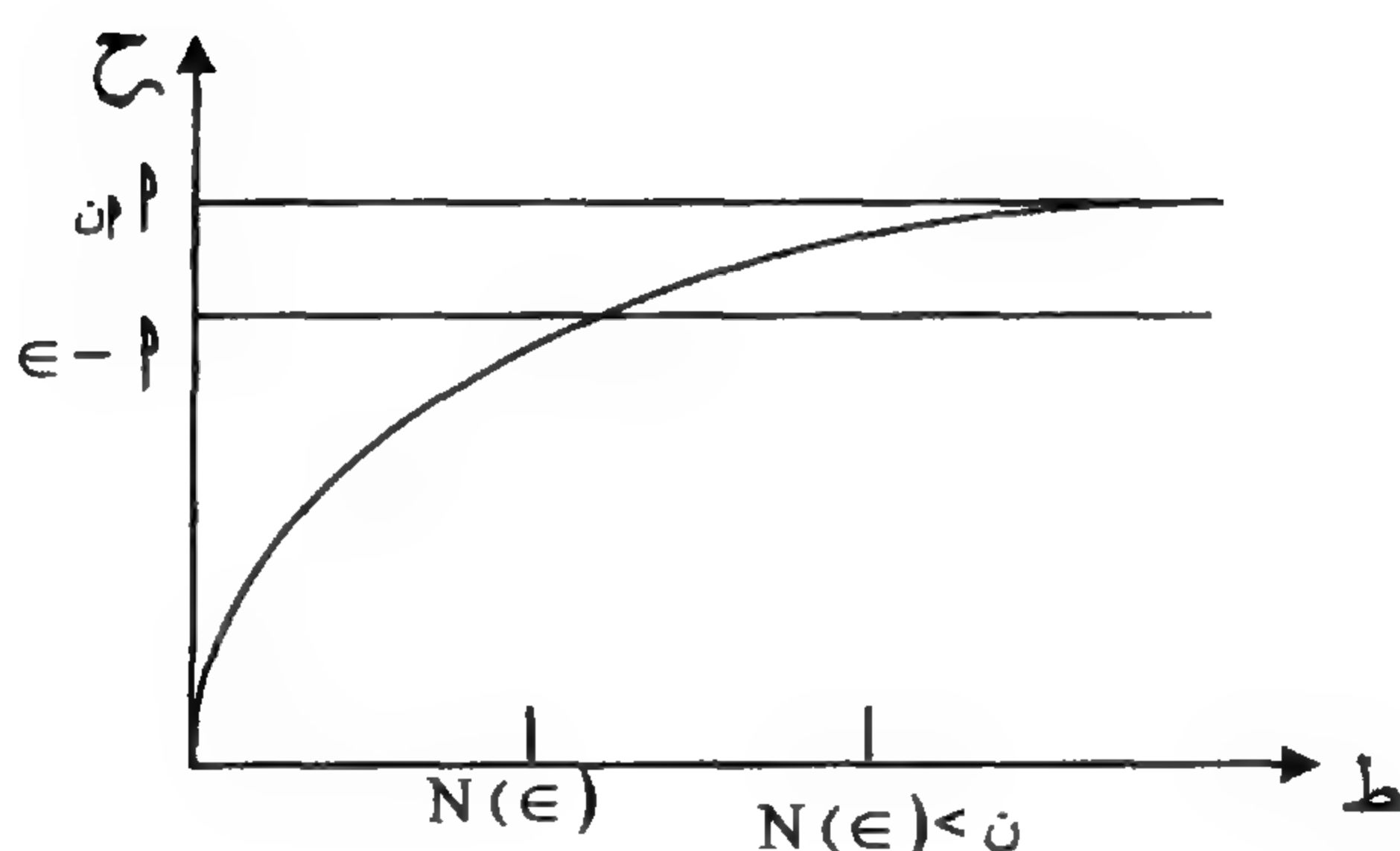
تعريف: نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها متقاربة إذا كان $\forall \epsilon > 0 : N \in \mathbb{N}$

$(\epsilon) N < N$ حيث أن $N (\epsilon)$ عبارة عن فترة نصف قطرها ϵ

$|a_n - l| < \epsilon$ ونقول عن العدد l أنه نهاية هذه المتتالية ونكتب $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$



التفسير الهندسي لتعريف التقارب: إذا وجد لكل عدد حقيقي موجب نختاره نحن (بصورة كيفية) عدداً طبيعياً تابعاً له $N(\epsilon)$ بحيث أنه من أجل N أكبر من $N(\epsilon)$ أي أن N بعد $N(\epsilon)$ فإن المقدار a_n "حد المتتالية" قيمتها ستقترب قريباً كافياً من العدد l وهذا ما عبرنا عنه $|a_n - l| < \epsilon$ وتمثيله الهندسي بالشكل:



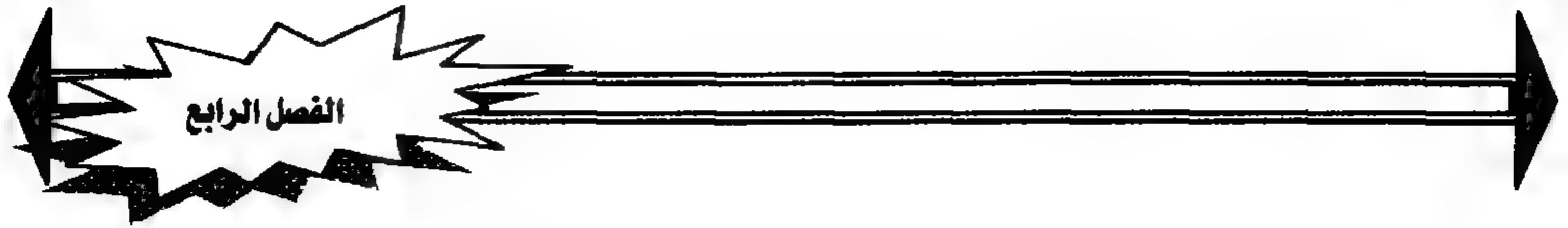
ولمناقشة الأخيرة من أجل أي عدد ϵ نختاره.

وبالتالي فعند مناقشة تقارب متتالية $\{a_n\}$ نحو عدد l معلوم لدينا فإننا نركز على إيجاد العلاقة التي تربط بين ϵ و $N(\epsilon)$ فإذا لم تكن هذه العلاقة موجودة فإن التعريف لن يكون محققاً ولن يكون هنالك تقارباً نحو العدد l

مثال: برهن على أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

الآن لنكتب $\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) : n > N(\epsilon) \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon$

$$\left| -\frac{1}{n} \right| < \epsilon \iff \epsilon > \frac{1}{n} \iff \frac{1}{\epsilon} < n$$



الآن باختيار $N(\epsilon) = [\frac{1}{\epsilon}]$ وبالتالي وصلنا إلى علاقة تربط بين ϵ و $N(\epsilon)$ عندئذ فإن التعريف محقق من أجل $N(\epsilon) < \infty$ وعندئذ فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

مثال: برهن أن $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ ، الآن لنفرض جـداً أن $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ حيث $\infty > M$ وإذا كتبنا الآن

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) : n > N(\epsilon) : |n - M| < \epsilon$$

$$: |n - M| < \epsilon$$

$$M - \epsilon < n < M + \epsilon$$

وطالما كان العدد n أصغر من $M + \epsilon$ كان التعريف محققاً أما إذا كان $n < M + \epsilon$ عندئذ فإن التعريف يصبح غير محققاً وبالتالي المتتالية $n = n$ غير متقاربة نحو عدد M كما فرضنا.

ملاحظات هامة للتعريف:

١. إن التعريف يعتبر شرطاً لازماً وكافياً للتقارب.
٢. نستخدم هذا التعريف عندما نريد إثبات أن عدداً ما M يكون معلوماً أنه نهاية للمتتالية $\{n\}$.
٣. نسمي المتتالية التي يكون فيها $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \pm \infty$ متتالية غير متقاربة أو متتالية متباعدة وعندما تكون $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \pm \infty$ غير موجودة فإن المتتالية أيضاً تكون متباعدة.



أمثلة:

٢- المتتالية $a_n = \frac{1}{(b)^n}$ برهن أن هذه المتتالية متقاربة من الصفر عندما $b > 1$

الآن بملاحظة المقدار $|p - \frac{1}{c}| = |p - 0| = p$

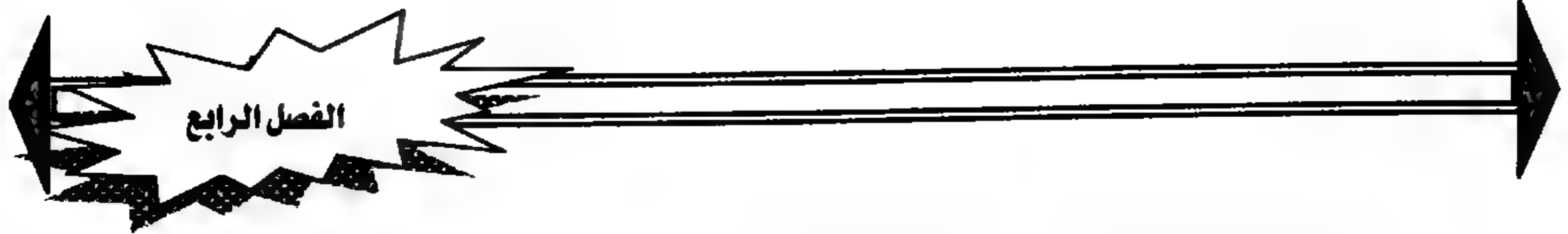
$\Leftarrow \frac{1}{\epsilon} > \Leftarrow \epsilon \Leftarrow \frac{1}{\epsilon} < \frac{1}{\epsilon} \Leftarrow \frac{1}{\epsilon} < \text{لو ب} < \text{لو} (\frac{1}{\epsilon}) \Leftarrow \text{ق} <$

$$N(\epsilon) = \left[\frac{Q_n \left(\frac{1}{\epsilon} \right)}{Q_p(b)} \right] \text{ وباختيار } \frac{Q_n \left(\frac{1}{\epsilon} \right)}{Q_p(b)}$$

أما من أجل الحالة ب = ١ نجد أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ، أما من أجل

الحالة ب $1 < \rho$ عندئذ فإنه يوجد عدد مثل ج بحيث $\rho = \frac{1}{\beta}$ وتصبح

نہا $\frac{1}{\infty \leftarrow \text{ب}}$ = نہا (ج) 2 حیث ج $1 <$ و بفرض نہا (ج) 0 $\infty > 1$



الآن لنطبق التعريف ونلاحظ المقدار $|p - p_n| = |p - p_n|$ $\epsilon > 0$

$$\iff p - \epsilon < p_n < p + \epsilon \iff p - \epsilon < p_n < p + \epsilon$$

$$\iff \frac{(p+\epsilon)}{n} > n$$

وطالما كانت n أصغر من المقدار $\frac{(p+\epsilon)}{n}$ كان التعريف محققاً أما إذا

كانت n أكبر من المقدار المذكور فإن التعريف يكون غير محققاً و $b > 1$

$$\text{حيث } \frac{1}{b} = \infty \iff \frac{1}{b} = \infty$$

$$\text{بتطبيق: } \frac{1}{(2)} = \infty \iff \frac{1}{(2)} = \infty$$

مبرهنة: ١- إذا وجدت النهاية فإنها وحيدة.

البرهان: بفرض أنها p ونها $p_n = p$ حيث $p \neq p'$ عندئذ وحسب

التعريف

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) < \infty : n > N(\epsilon) \implies |p - p_n| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) < \infty : n > N(\epsilon) \implies |p - p_n| < \epsilon$$

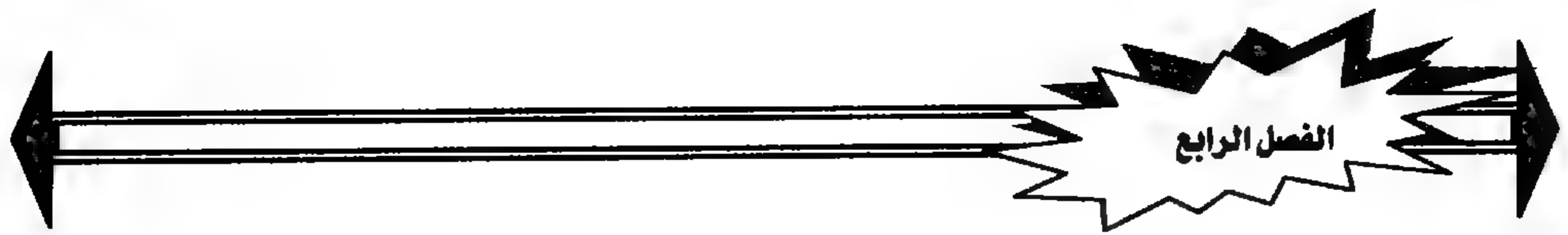
الآن إذا اخترنا $\{N(\epsilon), N(\epsilon')\}$ القيمة العظمى لهما وأسميناها N

عندئذ فإن:

$$|p - p'| = |(p - p_n) - (p' - p_n)| > |p - p_n| - |p' - p_n|$$

$$\epsilon - \epsilon'$$





وباختيار $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$ $\iff |p - p'| < \epsilon$ وهو المطلوب.

مبرهنة ٢: إن كل متتالية متقاربة هي محدودة ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

البرهان: بفرض $\{p_n\}$ متتالية متقاربة نحو العدد p عندئذ فإنه وحسب التعريف:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\epsilon) \implies |p - p_n| < \epsilon$$

$$\iff |p_n| < |p| + \epsilon \quad (\text{باختيار } \epsilon = 1)$$

$$\iff |p_n| < |p| + 1 \quad \forall n > N(1)$$

وبالتالي فإنه من أجل $M = |p| + 1$ $\iff |p_n| < M$ $\forall n > N(1)$.

وبالتالي $\{p_n\}$ محدودة تعريفاً.

وبالنسبة للقسم الثاني من المبرهنة فإنه بالنظر إلى المتتالية $p_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ نجد

أنها محدودة من الأعلى بالعدد ١ ومن الأدنى بالعدد ١ - ولكنها غير متقاربة.

مبرهنة ٣:

إذا كانت $\{p_n\}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة نحو الحد

الأعلى الأصغر $\sup \{p_n\}$ $\exists \sup$

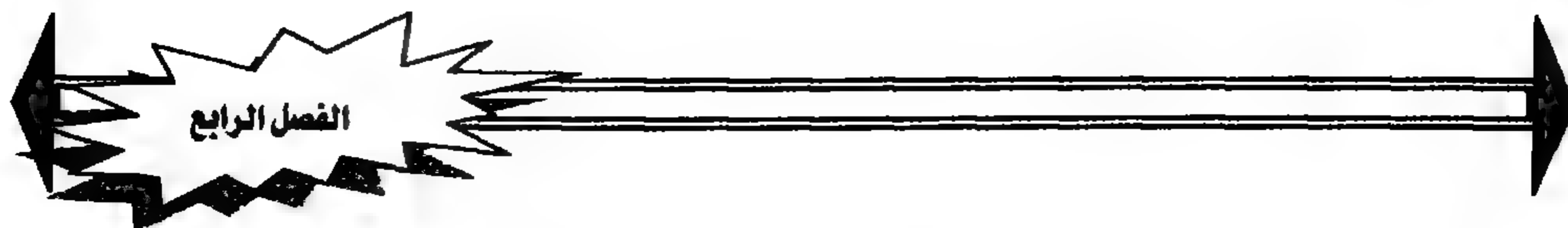
البرهان:

إذا كانت لدينا $\{p_n\}$ متزايدة عندئذ فإن $E : n < n' : p_n < p_{n'}$

وإذا كانت $\{p_n\}$ محدودة من الأعلى عندئذ فإن $E : n < n' : p_n < p_{n'}$

حيث M هو الحد الأعلى الأصغري.





عندئذ وباختيار القيمة العظمى $\{n, n+1\} = N(\epsilon)$ يصبح لدينا:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists E : N(\epsilon) < n : N(\epsilon) \Leftarrow m - \epsilon \leq n \leq m + \epsilon$$

ϵ الطرف الأيمن من المتراجحة يبرر على أساس أن $\{n\}$ محدودة، والطرف الأيسر منه يبرر لأن $\{n\}$ متزايدة.

الآن من تعريف الحد الأعلى الأصغري فإن m هو حد أعلى أصغري

للمتتالية و $|n - m| < \epsilon \Leftarrow n \in N(\epsilon)$ وهو المطلوب.

مبرهنة ٤:

إذا كانت لدينا المتتالية $\{n\}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة

نحو الحد الأدنى الأعظمي لها $\inf_{n \in N} \{a_n\}$ حيث $\{n\} = \{a_n\}$; $n \in N$; $n \in \mathbb{R}$.

البرهان: تبرهن هذه المبرهنة بنفس طريقة البرهان السابق.

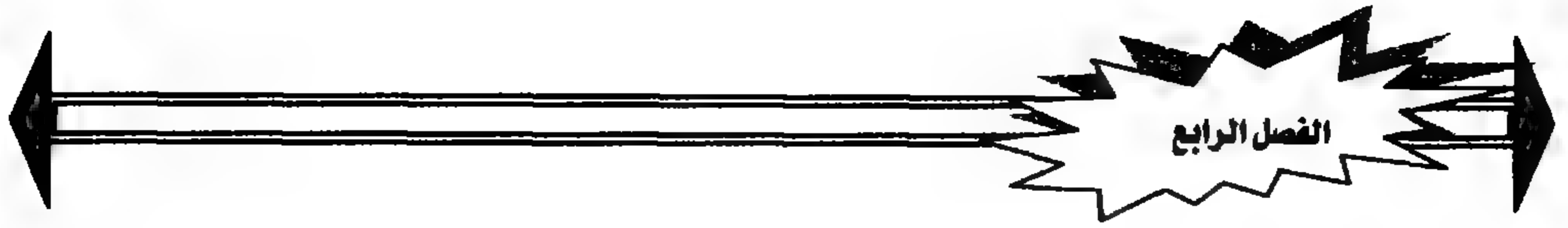
ملاحظات هامة على المبرهنة:

١- إذا كانت المتتالية $\{n\}$ متزايدة وغير محدودة من الأعلى فهي متباعدة حتماً.

٢- إذا كانت المتتالية $\{n\}$ متناقصة وغير محدودة من الأدنى فهي متباعدة حتماً.

٣- الشروط الواردة في المبرهنة ٣- و ٤- هي شروط كافية وغير لازمة للتقارب.





أمثلة. هامة:

١- أثبت أن المتتالية المعطاة بالقاعدة الضمنية $a_n = \sqrt[n]{p+2}$ حيث $p=1$ متقاربة وأوجد نهايتها.

الحل:

أولاً نلاحظ أن هذه المتتالية متتالية متزايدة وذلك لأن $a_n = \sqrt[n]{p+2} > \sqrt[n-1]{p+2} = a_{n-1}$ أيضاً نلاحظ أن $\{a_n\}$ محدودة من الأعلى ذلك لأن $a_n = \sqrt[n]{p+2} < 2$ وبالتالي $a_n > 1$ ومتزايدة $1 < a_n < 2$ وذلك حسب المبرهنة ٣- الآن من أجل حساب النهاية سنفرض أن $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$ ونها $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = p$

حسب الملاحظة ٤-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{p+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$$

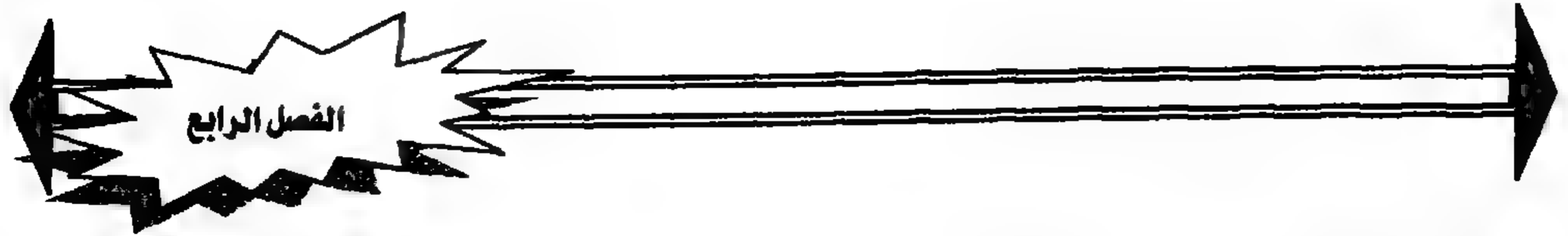
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - a_n = 0 \text{ وبجمل المعادلة الأخيرة نحصل على } p = 2 \text{ أو } p = 1$$

والحل

$p = 1$ مرفوض كون المتتالية ذات إشارة موجبة عندئذ فإن نها $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

٢- أثبت أن المتتالية $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ متقاربة.





أولاً: المتتالية المعطاة متزايدة لأن

$$..... + \frac{1}{n} \cdot \frac{(2-n)(1-n)n}{3} + \frac{1}{n} \cdot \frac{(1-n)n}{2} + 1 + 1 = \left(\frac{1}{n} + 1 \right) = {}_{n+1}P$$

$$..... + \left(\frac{2}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + 2 =$$

$$..... + \left(\frac{2}{1+n} - 1 \right) \left(\frac{1}{1+n} - 1 \right) \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{1+n} - 1 \right) \frac{1}{2} + 2 + 2 = {}_{n+1}P$$

$$\text{وبملاحظة أن } \left(\frac{1}{1+n} - 1 \right) > \left(\frac{1}{n} - 1 \right)$$

نجد أن ${}_{n+1}P = {}_nP \iff \{ {}_nP \}$ متزايدة، الآن لنبرهن أن محدودة فنجد أن:

$$..... + \left(\frac{2}{1+n} - 1 \right) \left(\frac{1}{1+n} - 1 \right) \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{1+n} - 1 \right) \frac{1}{2} + 2 + 2 = {}_nP$$

$$..... + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \geq$$

$$\text{وبملاحظة أن } n! < (2)^{n-1} \iff n! < (2)^{n-1} \iff \frac{1}{(2)^{n-1}} <$$

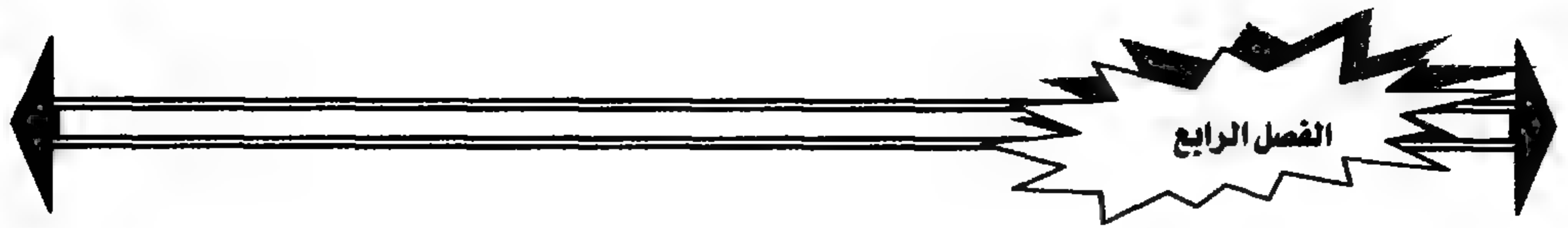
$$\frac{1}{n!} < {}_nP > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$$

الآن من أجل الطرف الأيمن للمراجعة نجد أنه مجموع متتالية هندسية

أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول 2

$$\frac{8}{3} = \frac{2}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{2}{\left(\frac{1}{4} - 1 \right)} = \frac{\left(\left(\frac{1}{4} \right)^2 - 1 \right)}{\left(\frac{1}{4} - 1 \right)} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +$$





$p_n > \frac{1}{3} \iff \{p_n\}$ محدودة من الأعلى ومتزايدة $\iff \{p_n\}$ متقاربة

حسب المبرهنة ٣- ونهايتها تسمى العدد النيبيري هـ حيث هـ = ٢,٧١

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

مثال: بفرض لدينا المتتالية $p_n = \sqrt[n]{n}$ حيث $1 < p$ برهن أنها متقاربة وأوجد نهايتها.

الحل:

نلاحظ أن:

$$p = (1 + 1 - \sqrt[n]{n})^n = 1 + n(1 - \sqrt[n]{n}) + \frac{n(n-1)}{2!} \dots$$

$$\iff 1 - \sqrt[n]{n} > \frac{p}{n} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sqrt[n]{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n} = 0$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

خواص نهاية المتتاليات:

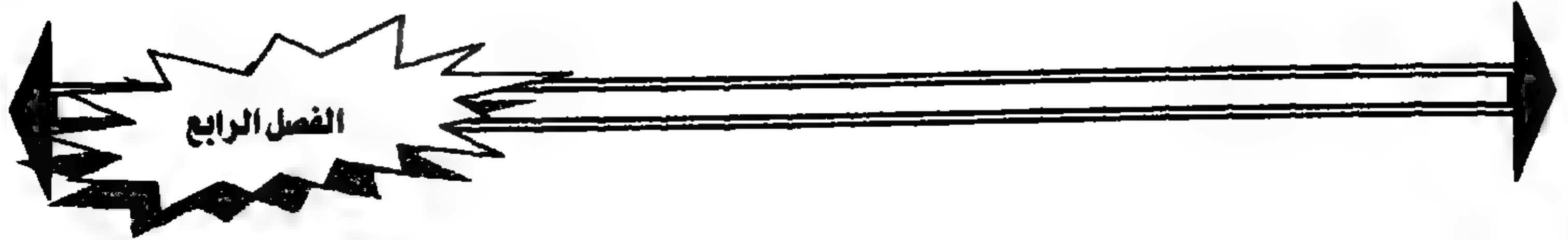
مبرهنة ٥:

إذا كانت لدينا نها $p_n = p$ ونها $b_n = b$ عندئذ فإن

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$





$$2- \text{نها } (a_n - b_n) = \text{نها } a_n - \text{نها } b_n \quad \text{نها } a_n = \frac{\text{نها } a_n}{\text{نها } b_n} = \frac{\text{نها } a_n}{\text{نها } b_n}$$

البرهان: من الفرض لدينا:

$$\forall \epsilon_1 > 0 : \exists N(\epsilon_1) < \infty : n > N(\epsilon_1) \Rightarrow |a_n - b_n| < \epsilon_1$$

$$\forall \epsilon_2 > 0 : \exists N(\epsilon_2) < \infty : n > N(\epsilon_2) \Rightarrow |a_n - b_n| < \epsilon_2$$

الآن من أجل (1) نلاحظ أنه إذا اخترنا القيمة العظمى لـ:

$$N = \{N(\epsilon_1), N(\epsilon_2)\}$$

ونلاحظ المقدار $|a_n - b_n| = |(a_n + b_n) - (b_n + b_n)|$

$$\epsilon_2 + \epsilon_1 > |a_n - b_n| + |b_n - b_n| \geq$$

وباختيار $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ يتحقق التعريف نها $(a_n + b_n)$

أما من أجل 2- فإنه باختيار $\{N(\epsilon_1), N(\epsilon_2)\}$ والقيمة العظمى

لهما رمزنا لها بالرمز N وبملاحظة المقدار نجد أن $|a_n - b_n| = |(a_n + b_n) - (b_n + b_n)|$

$$\epsilon_2 + \epsilon_1 > |a_n - b_n| + |b_n - b_n| \geq |(a_n + b_n) - (b_n + b_n)|$$

الآن باختيار:

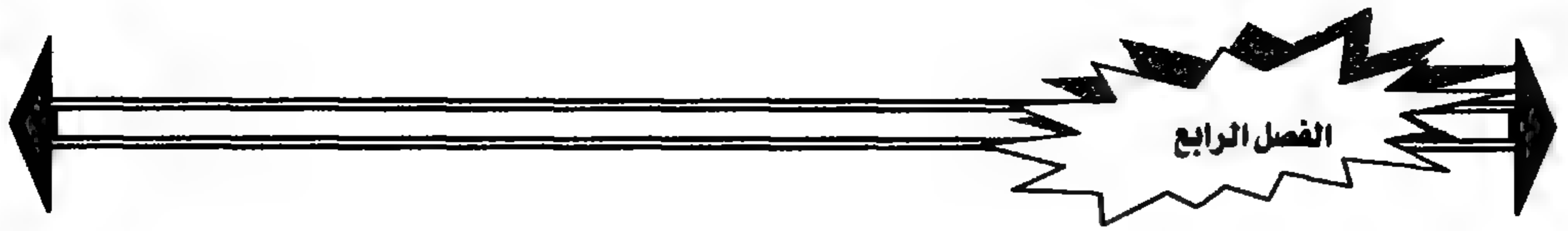
$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \text{ نجد أن التعريف محقق ونها } (a_n - b_n)$$

ومن أجل 3- سنلاحظ المقدار:

$$|a_n - b_n| = |a_n + b_n - b_n| = |a_n + b_n - b_n|$$

$$= |a_n + b_n - b_n| \geq |a_n| + |b_n - b_n|$$





وباعتبار أن $p_n = p$

فهي متقاربة وبالتالي محدودة ولنفرض بالعدد m .

$\Leftarrow E_n : n < n_0 : |p_n| > m$ ، الآن باختبار القيمة العظمى
 $\{N(\epsilon_1), N(\epsilon_2), \dots\}$ ولنفرض أنها تساوي n_0 نجد أن:

$$|p_n - p| = |p_n - p + p - p| \leq |p_n - p| + |p - p| = |p_n - p|$$

وباختيار:

$$\epsilon = |p| + \epsilon_1 \text{، يتحقق التعريف } \Leftarrow \text{نحدا } p_n = p$$

الآن من أجل -4- نلاحظ المقدار $\left| \frac{p_n}{p} - \frac{p}{p} \right| = \left| \frac{p_n - p}{p} \right|$

$$\frac{1}{|p|} \geq \left| \frac{(p_n - p) - (p - p)}{p} \right| = \left| \frac{p_n - p}{p} \right|$$

$|p_n - p| + \left| \frac{p}{p} \right| = |p_n - p| + 1$ وبملاحظة أن $\{p_n\}$ ، $\{p\}$ متقاربتان

\Leftarrow هما محدودتين \Leftarrow وباختيار القيمة العظمى لـ $\{N(\epsilon_1), N(\epsilon_2), \dots\}$

ولنرمز لها بالرمز n . وباختيار $\epsilon = \frac{\epsilon_1}{|p|} + \epsilon_2$ ، يتحقق التعريف

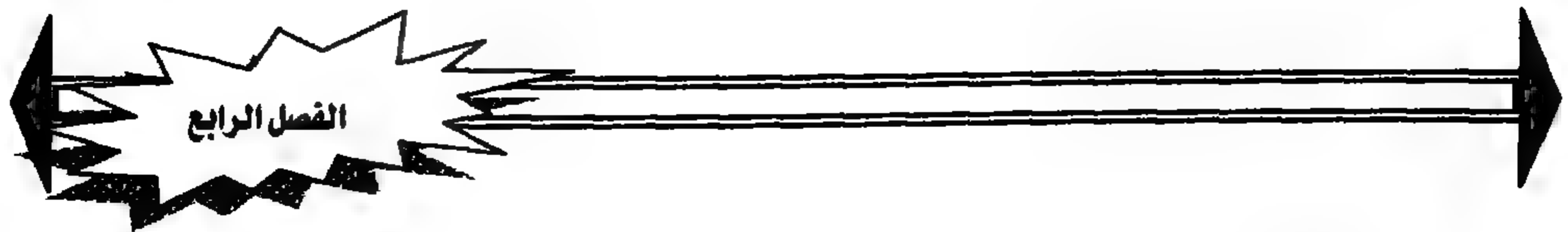
$$\Leftarrow \text{نحدا } \frac{p_n}{p} = \frac{p}{p} \text{ حيث } p \neq 0$$

خواص المقارنة:

١- إذا كانت لدينا $p_n = p$ ، ونحدا $p_n = p$ وكان $p_n \geq p$ ولو بدءاً

من حد معين عندئذ فإن $p_n = p \leq p$ نحدا $p_n = p$.





٢- إذا كان لدينا $n \leq m \leq n$ وكانت $n = m$ عندئذ

فإن $n = m$.

في الواقع $n + m \leq n \leq m \leq n - m \in$ حسب تعريف تقارب $\{n\}$ ، $\{m\}$ ، $\{n - m\} \in$ $n = m$.

٣- إذا وجدت $n = m$ فإن $n = m$ موجودة والعكس غير صحيح بالضرورة.

تتج هذه الخاصية من ملاحظة أن $n - m \geq |n - m| \in$ أما العكس فبملاحظة أن المتتالية $n = (1 - n)$ ليس لها نهاية بينما $n = 1$ متقاربة لأنها ثابتة أي أن $n = 1$.

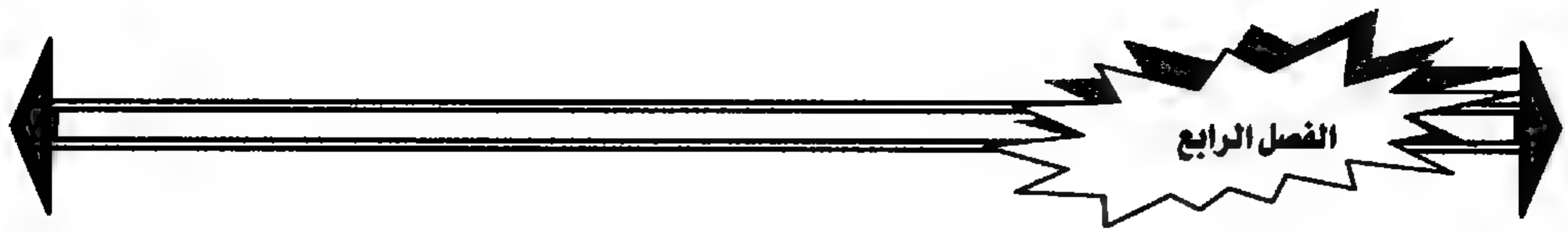
ملاحظات هامة:

١- إن الشروط الواردة في فقرة (خواص نهاية المتتاليات) شروط كافية وليست لازمة أي أنه إذا وجدت $n = m$ و $n = m$ فإن $n = m$ $n + m = n + m$ موجودة بينما إذا كانت $n + m$ موجودة فقط تكون n أو m غير موجودتين وكذلك الأمر بالنسبة لـ n $n - m = n$ أو m أو n أو m .

مثال: بفرض $n = \infty$ غير موجودة و $n = \frac{1}{2}$ صفر نلاحظ أن n

$\times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ بفرض أيضاً





نها $(1-)^n$ غير موجودة ونها $\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty}$ عندئذ فإن نها $\frac{(1-)^n}{n} = 0$

حالات عدم التعيين:

إذا كنا أمام حساب نهاية متتالية عددية حقيقية ووجدنا إحدى الحالات

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \text{ضرب } \infty \\ 1^{\infty}, 0^{\infty}, (\infty)^0 \\ \infty - \infty \end{array} \right\} = \text{نها } \lim_{n \rightarrow \infty}$$

فإذا حصلنا على إحدى الحالات السابقة وجب علينا إزالتها مع ملاحظة أن إزالتها تعطي إما صفراً أو لا نهاية أو عدداً محدوداً.



أمثلة عامة:

$$1- \text{احسب نها } \frac{1 + n^2}{n + n^3} \text{ نها } \infty \leftarrow n$$

بملاحظة أن نها $\frac{1 + n^2}{n + n^3} = \frac{\infty}{\infty}$ لذلك يجب إزالة حالة عدم التعيين هذه

$$0 = \frac{1}{n} \text{ نها } \infty \leftarrow n = \frac{\left(\frac{1}{n} + 1\right)^2 n}{\left(\frac{1}{n} + 1\right)^2 n} \text{ نها } \infty \leftarrow n$$

$$2- \text{احسب النهاية نها } \frac{1 + n^2}{5 + n^3} \text{ بملاحظة أن نها } \frac{1 + n^2}{5 + n^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{n} + 2}{\frac{1}{n} + 3} \text{ نها } \infty \leftarrow n = \frac{\left(\frac{1}{n} + 2\right) n}{\left(\frac{1}{n} + 3\right) n} \text{ نها } \infty \leftarrow n = \frac{1 + n^2}{5 + n^3} \text{ نها } \infty \leftarrow n$$

$$3- \text{احسب النهاية نها } \frac{1 + n^2}{n} \text{ بملاحظة أن نها } \frac{1 + n^2}{n} = \frac{\infty}{\infty} \text{ وهي حالة عدم تعيين.}$$

∞ وهي حالة عدم تعيين.

$$\text{نها } \frac{1 + n^2}{n} = \frac{1}{n} + n \text{ نها } \infty \leftarrow n = \infty \text{ وبشكل عام يمكن إيراد الخاصية}$$

التالية:

$$\text{إذا كنا أمام النهاية نها } \frac{a_1 n^j + a_2 n^{j-1} + \dots + a_n}{b_1 n^r + b_2 n^{r-1} + \dots + b_s} \text{ عندئذ فإنه}$$

لدينا ٣ حالات:

$$1- \text{نها} \quad \infty = \frac{a_n + \dots + a_1}{b_n + \dots + b_1} \quad \text{حيث } m > l$$

$$2- \text{نها} \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n + \dots + a_1}{b_n + \dots + b_1} \quad \text{حيث } l = m$$

$$3- \text{نها} \quad 0 = \frac{a_n + \dots + a_1}{b_n + \dots + b_1} \quad \text{حيث } m < l$$

مبرهنة ستولتز:

إذا كانت لدينا متتالية متزايدة $\{b_n\}$ وغير محدودة ومتتالية أخرى $\{a_n\}$

$$\text{بحيث أن } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \text{ عندئذ فإن: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

البرهان:

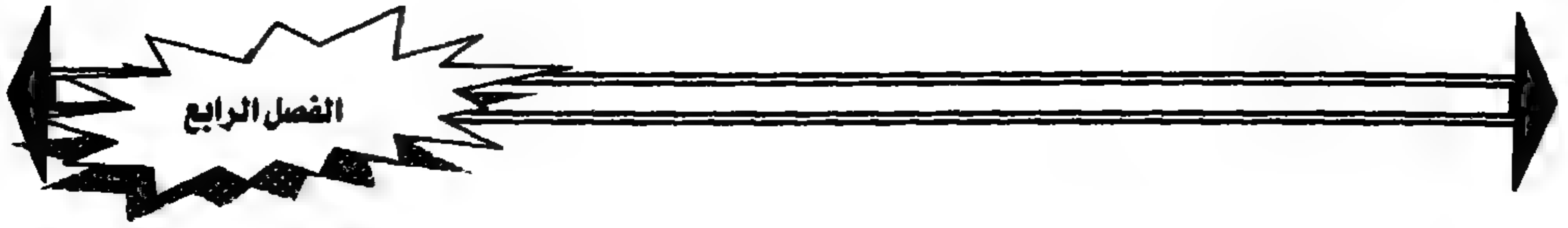
$$\text{بفرض النهاية } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = p \text{ حيث } p \text{ عدداً محدوداً عندئذ فإن:}$$

$$p - \epsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < p + \epsilon \text{ بدءاً من حد معين } N.$$

$$\text{عندئذ يمكن كتابة } p - \epsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < p + \epsilon$$

$$p - \epsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < p + \epsilon$$

$$\text{الآن وحسب خواص النسبة } p - \epsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < p + \epsilon$$



$$= \left| \frac{N^p - N^b}{N^b} + \left(1 - \frac{N^b}{N^p} \right) \left(\frac{a_n - a}{b_n - b} - p \right) \right|$$

$$\left| \left(1 - \frac{a_n - a}{b_n - b} \right) \right| + \left| \frac{a_n \cdot p - a}{b_n} \right| \geq \left| \frac{a_n}{a} - p \right|$$

وبملاحظة أن:

$$\left| \frac{a_n \cdot p - a}{b_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{نها}} 0$$

وبملاحظة أن $\{b_n\}$ متزايدة وغير محدودة عندئذ فإن:

$$0 = \left| \left(p - \frac{N^p - a_n}{b_n - b} \right) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{نها}} \left| \frac{N^p \cdot p - N^p}{N^b} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{نها}} 0$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{نها}} \left| p - \frac{a_n}{b_n} \right| = 0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{نها}} \left| p - \frac{a_n - 1 + a}{b_n - 1 + b} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{نها}} \left| p - \frac{a_n}{b_n} \right| = 0$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{نها}} \frac{a_n}{b_n} = p$$

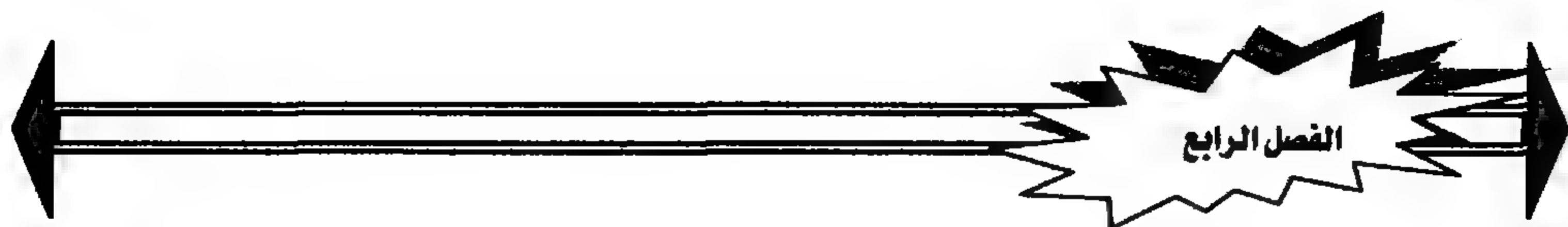
ملاحظة: نستخدم مبرهنة ستولتز في الغالب لإزالة حالات عدم التعيين.

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1 + n}{5 + 2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{نها}} \frac{1 + n}{5 + 2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{نها}} \frac{1 + n}{5 + 2n}$$

وهي حالة عدم تعيين يجب إزالتها:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{نها}} \frac{(1+n) - (2+n)}{(5+2n) - (5+(1+n) \cdot 2)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{نها}} \frac{1+n}{5+2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{نها}} \frac{1}{2}$$





❖ اللامتناهيات في الصغر واللامتناهيات في الكبر:

تعريف:

نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها لا متناهية في الصغر إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

ونقول عن المتتالية $\{b_n\}$ أنها لا متناهية في الكبر إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

خواص اللامتناهيات في الكبر واللامتناهيات في الصغر:

١- إن المجموع الجبري لعدد من اللامتناهيات في الصغر هو لا متناه في الصغر.

٢- جداء متغير محدود في لا متناه في الصغر هو لا متناه في الصغر.

٣- إذا كانت $\{a_n\}$ محدودة و $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$

المتتاليات الجزئية:

١- تعريف: إذا كانت لدينا متتالية $\{a_n\}$ حيث $a_n: p \leftarrow q$ وكان لدينا التطبيق

$n: p \leftarrow q$ و حيث ومجموعة جزئية من p عندئذ فإن:

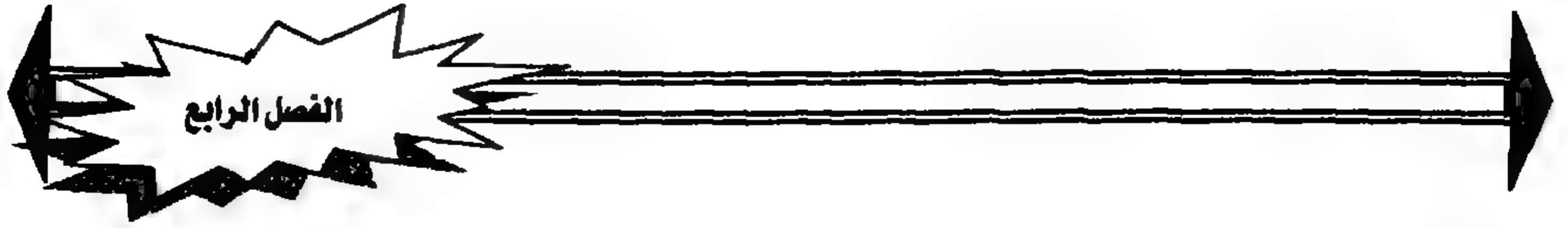
$a_n: p \leftarrow q$ هي متتالية جزئية من المتتالية $\{a_n\}$

مثال: بفرض لدينا $a_n = n^2$ وكان التطبيق $n: p \leftarrow q$ و p معرفاً بالشكل

$n: p \leftarrow q$ عندئذ فإن $a_n = (1 + 2k)^2$ وهي متتالية جزئية من المتتالية $\{a_n\}$.

مثال: $a_n = (1 - n)$ الآن بملاحظة $n: p \leftarrow q$ و حيث $n: p \leftarrow q$ عندئذ





فإن $a_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ وهي متتالية جزئية من $a_n = (1 - \frac{1}{n})^n$.

ملاحظة هامة: إن مجموعة قيم المتتالية الجزئية هي مجموعة جزئية من المتتالية الأصلية أي أن $\{a_n\} \supseteq \{a_{n_k}\}$.

مبرهنة ٧: إن الشرط اللازم والكافي لتقارب متتالية هو أن تتقارب كل متتالية جزئية منها نحو نفس العدد.

البرهان: اللزوم:

إذا كانت أي متتالية جزئية من المتتالية الأصلية متقاربة عندئذ فإن المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة لأن أي متتالية جزئية من نفسها.

الكفاية: بفرض أنها $a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ عندئذ وباعتبار $\{a_{n_k}\}$ حدود مختارة من

المتتالية الأصلية $\{a_n\}$ فإن: $|a_{n_k} - a| < \epsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}$ \Leftarrow أنها $a_{n_k} = a$.

النهاية العليا والنهاية الدنيا: تعريف النهاية العليا:

بفرض $\{a_n\}$ هي متتالية جزئية من $\{a_n\}$ حيث $\{a_{n_k}\}$ هي أكبر المتتاليات الجزئية من $\{a_n\}$ عندئذ فإننا نقول أن:

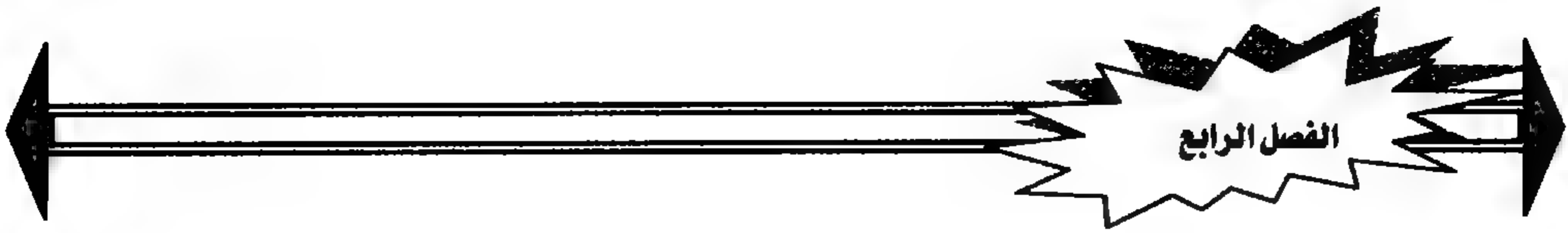
نها $a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ هي النهاية العليا للمتتالية $\{a_n\}$.

وتعرف النهاية الدنيا للمتتالية $\{a_n\}$ بأنها نهاية أصغر متتالية جزئية

ويرمز لها أنها $a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$

مثال: بفرض لدينا المتتالية $a_n = \frac{\pi n}{2}$ الآن بملاحظة أن: $a_{n+1} =$





$$\text{جا}(1+n\pi) = \frac{\pi}{2} = \text{جا}(\frac{\pi}{2} + n\pi) = \frac{\pi}{2} \text{ جا} = \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{وبالتالي نها } \text{جا} \frac{n\pi}{2} = 1, \text{ بينما نلاحظ أن نها } \text{جا} \left[\frac{\pi}{2}, (3+n\pi) \right]_{n \rightarrow \infty}$$

$$\text{نها } \text{جا} \frac{n\pi}{2} = 1 - \text{نها } 1 - = 1 -$$

مبرهنة ٨:

إن الشرط اللازم والكافي لوجود نها $\text{جا} \frac{n\pi}{2} = 1$ هو أن يكون:

$$\text{نها } \text{جا} \frac{n\pi}{2} = 1 \text{ نها } \text{جا} \frac{n\pi}{2} = 1$$

البرهان: اللزوم:

إذا كانت نها $\text{جا} \frac{n\pi}{2} = 1$ موجودة عندئذ فإن أي متتالية جزئية من $\{ \text{جا} \frac{n\pi}{2} \}$

متقاربة نحو نفس العدد وفقاً للمبرهنة ٧- وبالتالي:

$$\text{نها } \text{جا} \frac{n\pi}{2} = 1 \text{ نها } \text{جا} \frac{n\pi}{2} = 1 \text{ نها } \text{جا} \frac{n\pi}{2} = 1 \text{ نها } \text{جا} \frac{n\pi}{2} = 1$$

الكفاية: بملاحظة أن $\text{جا} \frac{n\pi}{2} \geq \text{جا} \frac{n\pi}{2} \geq \text{جا} \frac{n\pi}{2}$ وبملاحظة من الفرض أن

نها $\text{جا} \frac{n\pi}{2} = 1$ وبالتالي حسب الخاصية رقم ٢- من خواص المقارنة نجد

$$\text{أن نها } \text{جا} \frac{n\pi}{2} = 1 \text{ النهاية متقاربة نحو العدد } 1$$

مبرهنة ٩- إذا كانت $\{ \text{جا} \frac{n\pi}{2} \}$ متتالية متزايدة عندئذ فإن الشرط اللازم

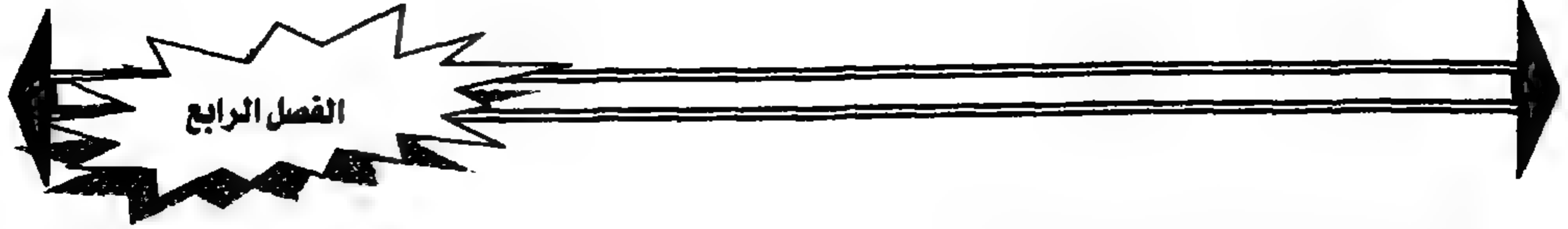
والكافي لتقارب $\{ \text{جا} \frac{n\pi}{2} \}$ هو تقارب أي متتالية جزئية فيها، أي أن تتقارب متتالية

جزئية منها واحدة على الأقل.

البرهان: إذا كانت $\{ \text{جا} \frac{n\pi}{2} \}$ متتالية متزايدة وكانت $\{ \text{جا} \frac{n\pi}{2} \}$ متتالية جزئية منها

متقاربة عندئذ فإن $\{ \text{جا} \frac{n\pi}{2} \}$ محدودة $\Leftarrow \{ \text{جا} \frac{n\pi}{2} \}$ متقاربة.





المتتاليات الجزئية النظامية:

تعريف: نقول عن مجموعة المتتاليات من أجل العدد (ف) بالشكل:

$$p_n = (1) \text{ ف}$$

$$p_n = (2) \text{ ف} + 1 \text{ بأنها متتاليات جزئية نظامية معرفة على المتتالية } \{p_n\}$$

من أجل العدد الطبيعي ف: $f \in \mathbb{N}$.

ملاحظة: إن المتتاليات الجزئية النظامية المعرفة من أجل العدد ف للمتتالية

$\{p_n\}$ يمثل تجزئة لمجموعة قيم المتتالية $\{p_n\}$.

أمثلة: ١- من أجل المتتالية $p_n = (1-n)^n$ لدينا المتتاليات الجزئية النظامية

من أجل ف = ٢ بالشكل

$$p_n = (1) \text{ ف} = p_{2n} = (1-n)^{2n} = 1$$

$$p_n = (2) \text{ ف} = 1 + p_{2n} = 1 + (1-n)^{2n} = 1 -$$

٢- من أجل المتتالية $p_n = \text{جا} \frac{\pi n}{\pi}$ لدينا المتتاليات الجزئية النظامية من أجل

ف = ٤ بالشكل

$$p_n = (1) \text{ ف} = p_{4n} = \text{جا} \frac{\pi \cdot 4n}{\pi} = 1 + p_{4n} = (2) \text{ ف} = \left(\frac{\pi}{\pi} (1 + 4n) \right) \text{ جا}$$

$$p_n = (3) \text{ ف} = 2 + p_{4n} = \left(\frac{\pi}{\pi} (2 + 4n) \right) \text{ جا} = 3 + p_{4n} = (4) \text{ ف} =$$

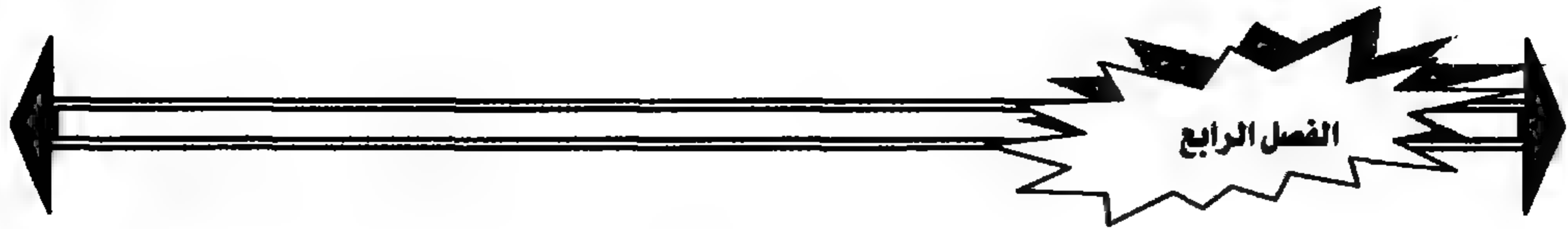
$$1 - \left(\frac{\pi}{\pi} (3 + 4n) \right) \text{ جا}$$

مبرهنة ١٠-: إن الشرط اللازم والكافي لكي تكون $\{p_n\}$ متقاربة هو أن تكون

المتتاليات الجزئية النظامية المعرفة من أجل أي عدد ف للمتتالية $\{p_n\}$ متقاربة

نحو عدد معين p .





المتتاليات الأساسية "متتاليات كوشي":

تعريف: نقول أن $\{a_n\}$ هي متتالية كوشية إذا كانت:

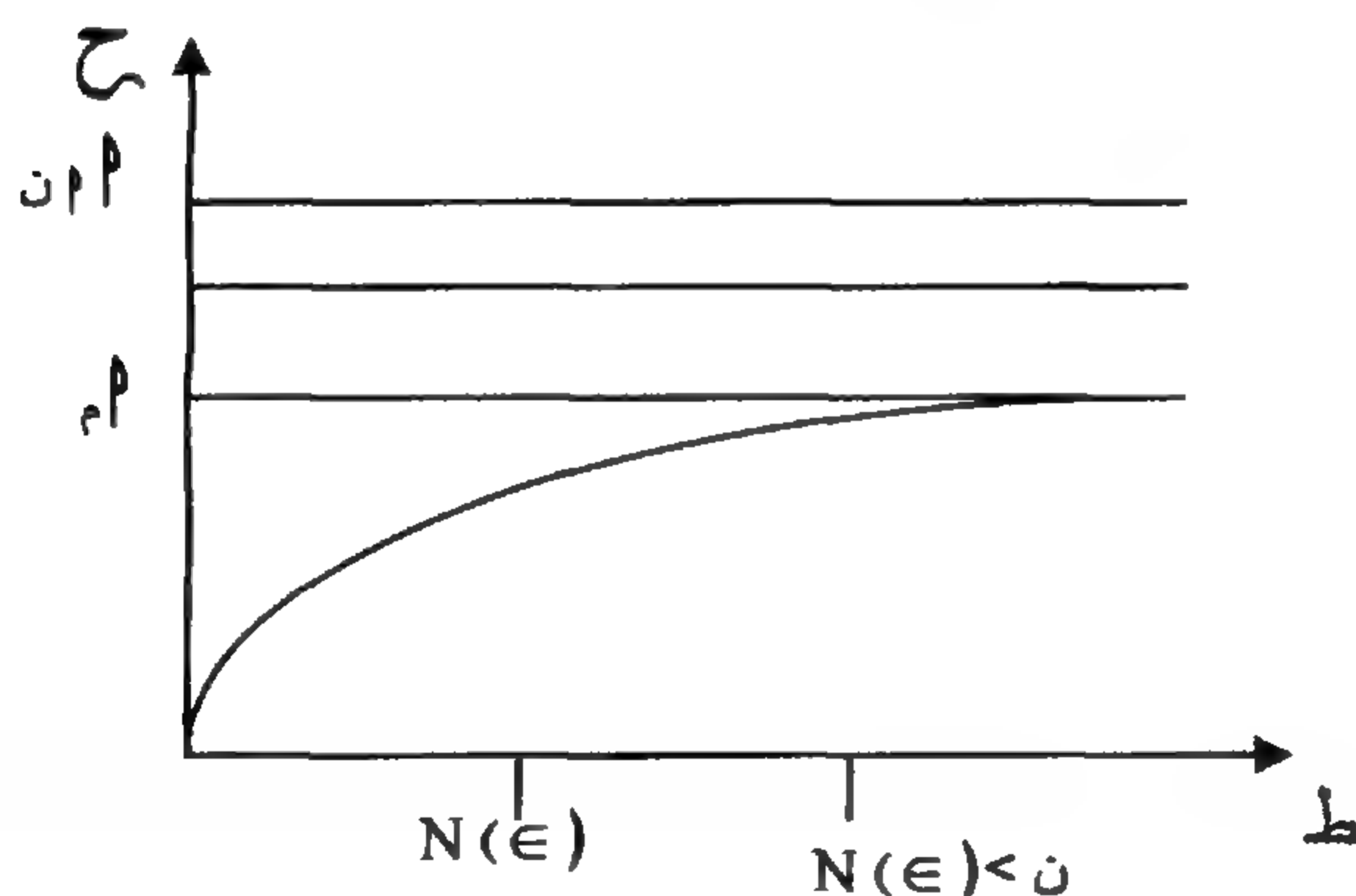
$$\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : n, m > N(\epsilon) \implies |a_n - a_m| < \epsilon$$

مفهوم تعريف كوشي: معنى أن تكون $\{a_n\}$ كوشية هو أن يكون الفرق بين حدودها بدءاً من حد معين $N(\epsilon)$ هو مقدار صغير جداً وأصغر من (ϵ) .

يمكن صياغة شرط كوشي على الشكل:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : n > N(\epsilon) \implies |a_n - a| < \epsilon$$

مهما يكن العدد a الطبيعي.



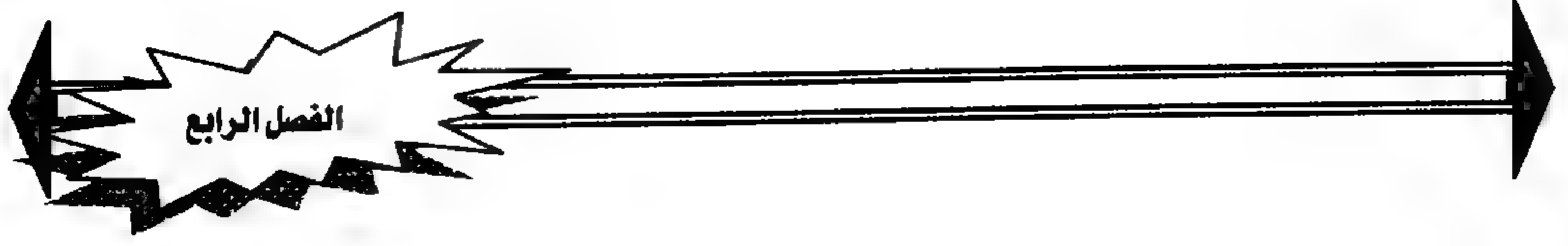
مبرهنة هامة - ١١ - إن كل متتالية كوشية متقاربة وكل متتالية متقاربة كوشية.

البرهان: إذا كانت $\{a_n\}$ كوشية فإن وحسب التعريف:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : n, m > N(\epsilon) \implies |a_n - a_m| < \epsilon$$

$$\implies |a_n - a| \leq |(a_n - a_m) + (a_m - a)| = |a_n - a_m| + |a_m - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$





$$\epsilon > |p - p_n| \iff \epsilon > |p - p_m| + |p - p_n|$$

المتتالية $\{p_n\}$ متقاربة تعريفاً

أما إذا كانت $\{p_n\}$ متقاربة فإننا نستطيع الكتابة أن:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : n > N(\epsilon) \implies |p - p_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\frac{\epsilon}{2} > (p - p_n) \iff N$$

وبملاحظة أن:

$$\epsilon > |p - p_m| + |p - p_n| \geq |(p - p_m) - p - p_n| = |p_m - p_n|$$

وهي كوشية تعريفاً.

مثال: برهن أن المتتالية $p_n = \frac{1}{n}$ كوشية حسب التعريف.

$$\text{الآن بملاحظة المقدار } |p_n - p_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| = \left| \frac{m - n}{nm} \right|$$

$$= \frac{|m - n|}{nm} \leq \frac{|m - n|}{n^2} \leq \frac{|m - n|}{n} < \epsilon \iff \frac{1}{n} < \epsilon$$

$$\left[\frac{1}{\epsilon} \right] \leq n \text{ يكون قد تم التعريف.}$$

$$\text{وباختيار } n = \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + 1 \text{ يكون قد تم التعريف.}$$

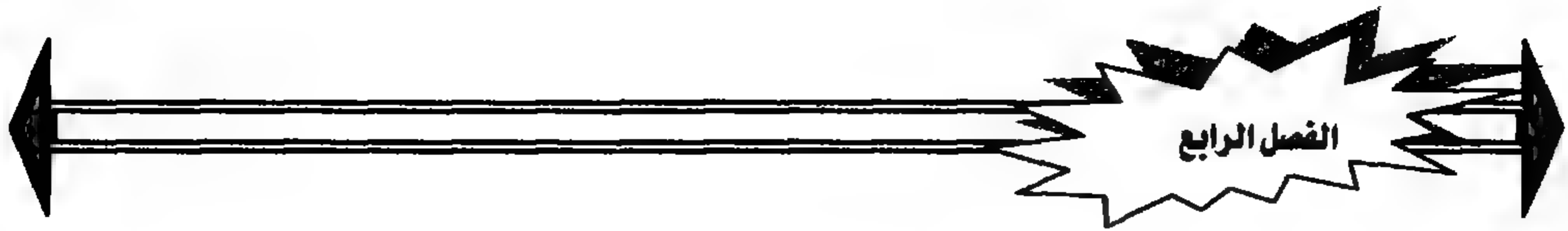
ملاحظات هامة:

١- إن شرط كوشي في التقارب لا يستلزم معرفة نهاية المتتالية المدروسة.

٢- يستخدم شرط كوشي في البراهين والحالات النظرية أكثر مما يستخدم في

حل التمارين وذلك لوجود أساليب عملية أسهل لإيجاد النهايات.





تمارين عامة في المتتاليات العددية:

١- أوجد النهايات التالية:

أ- نها $\frac{\sqrt[n]{n^2} \cdot \ln n}{n}$ بملاحظة أن $|\ln n| \geq 1$

المقدار $b_n = \frac{(n)^{2/2}}{n} = \frac{1}{(n)^{2/1}}$ وهو لا متناه في الصغر وبالتالي فإن:

نها $\frac{\sqrt[n]{n^2} \cdot \ln n}{n} = 0$

ب- نها $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n+1}$ الآن بملاحظة أن نها $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n+1} = \infty - \infty$

وهي حالة عدم تعيين يجب إزالتها وبملاحظة أن:

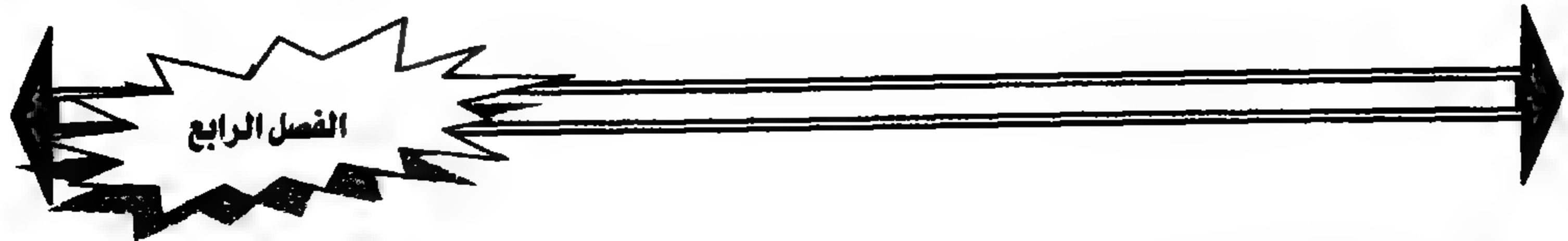
نها $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n+1}} \times \sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n+1} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n+1}}$

ج- نها $\frac{(2)^n}{n!}$ الآن بملاحظة أن نها $\frac{(2)^n}{n!} = \frac{\infty}{\infty}$ وهي حالة عدم تعيين يجب إزالتها.

الآن بملاحظة أن نها $\frac{(2)^n}{n!} = \frac{(2)^1}{1} \cdot \frac{(2)^2}{2} \cdot \frac{(2)^3}{3} \cdot \dots \cdot \frac{(2)^n}{n} = \frac{(2)^n}{n!}$

نها $\frac{(2)^n}{n!} = 0$





المتسلسلات العددية:

تعريف: نعرف المجموع اللانهائي للمتتالية $\{a_n\}$ بأنه المتسلسلة العددية ونرمز لها بالشكل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تعريف متتالية المجاميع الجزئية المنتهية: نقول أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متتالية المجاميع الجزئية المنتهية للمتسلسلة ونكتبها بالشكل: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ وبناءً على هذا التعريف فإن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n a_n$$

المتسلسلة المتقاربة: نقول عن متسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ أنها متقاربة إذا كانت مساوية لعدد محدود مثل ج وإذا لم تكن كذلك فإننا نقول إنها متباعدة.

ملاحظة هامة: إن الشرط اللازم والكافي لتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو أن تكون متتالية المجاميع الجزئية لها متقاربة وهذا ينتج من تعريف متتالية المجاميع الجزئية المذكور أعلاه.

مبرهنة - ١٢ -: إن الشرط اللازم وغير الكافي لتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو أن يكون $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

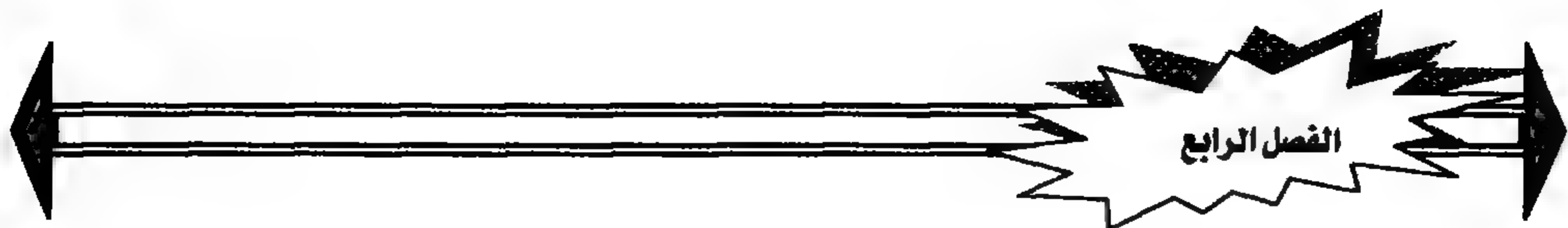
البرهان: في الواقع إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ج$

والآن $\{ج_n\}$ متتالية متقاربة فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} ج_n = ١ = ج$

الآن نلاحظ بأن:

$$ج_n = ١ + ٢ + \dots + a_n$$





$$جـ-١ = ١ + ٢ + \dots + ١-١$$

$$نها \text{ جـ-١} = ١-جـ = \text{نها} = ١-ج = ٠$$

ملاحظة: يمكن رد دراسة المتسلسلات العددية الى دراسة المتتاليات العددية وذلك عن طريق دراسة متتالية المجاميع الجزئية.

$$\text{مثال: بفرض المتسلسلة } \sum_{١}^{\infty} \frac{1}{(١+١)^١}$$

ادرس التقارب وأوجد مجموعها، الان اذا شكلنا متتالية المجاميع الجزئية

$$\text{فان: } ١-١ = \frac{1}{١+١} - \frac{1}{١} = \frac{1}{١+١} - \frac{1}{١} = \left(\frac{1}{١+١} - \frac{1}{١}\right) + \dots + \left(\frac{1}{٣} - \frac{1}{٢}\right) + \left(\frac{1}{٢} - ١\right) = جـ$$

$$ج = ١ - \frac{1}{١+١} = \frac{1}{١+١} - ١ = \text{نها} = ١-ج = ١ - \sum_{١}^{\infty} \frac{1}{(١+١)^١} = ١$$

وبالتالي المتسلسلة العددية $\sum_{١}^{\infty} \frac{1}{(١+١)^١}$ متقاربة ومجموعها يساوي العدد ١.

$$\text{مثال: ادرس تقارب المتسلسلة الهندسية } \sum_{١}^{\infty} ٢-١$$

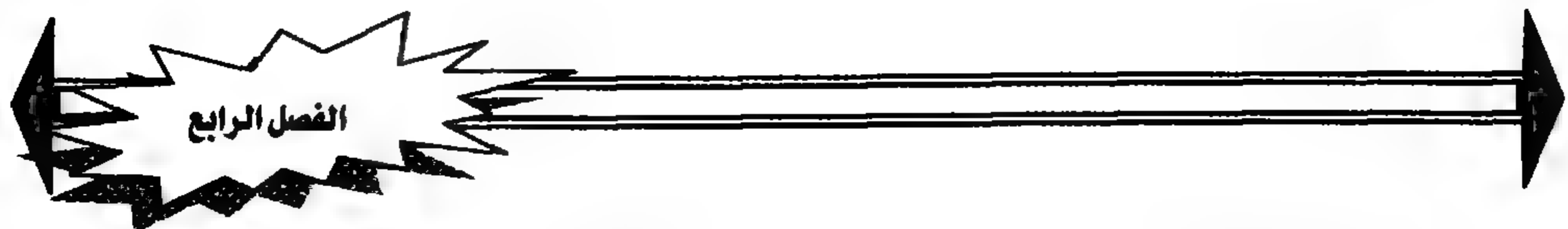
$$\text{لدراسة تقارب هذه المتسلسلة نشكل جـ بالشكل: } ١-ج = \left(\frac{١-١}{١-١}\right)^١, ١ \neq ١$$

وفي حالة $١=١$ المتسلسلة متباعدة ذلك لان $نها = ١-نها = ٠ \neq ١$ الان

لندرس حالة $١ \neq ١$ فنجد ان وذلك حسب الخواص الخطية للنهاية

$$\text{نها} = ١-ج = \left(\left(\frac{١-١}{١-١}\right)^١\right) = \frac{١-١}{١-١} = \text{نها}$$





والآن بملاحظة نها r_n تكون هذه النهاية موجودة ومتقاربة عندما

$|r| \geq 1$ وتكون نهايتها في هذه الحالة نها $r_n = 0$ وتكون نهايتها في هذه الحالة نها $r_n = 0$.

نها $r_n = \frac{1}{r-1}$ وفيما عدا ذلك تكون المتسلسلة متباعدة ,

تطبيق عددي: إن المجموع اللانهائي $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ موجود ومتقارب ومساوي الى

$$1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,

والان لنشكل متتالية المجاميع الجزئية $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$,

إن هذه المتتالية متزايدة كون $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} > 0$

ولنلاحظ الان أن:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{5}\right) + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} \times 2\right) + \left(\frac{1}{8} \times 4\right) + \left(\frac{1}{16} \times 8\right) + \dots$$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \leq s_{m+1}$ وبملاحظة ان $\frac{1}{2}$ مقدار غير

محدود $\{j_n\}$ متتالية غير محدود من الاعلى ومتزايدة , وحسب الملاحظة ١-
 فان $\{j_n\}$ متباعدة , وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متسلسلة متباعدة , في الواقع يمكن يراد
 الشرط الخاص بتقارب $\{j_n\}$ بالشكل: إن الشرط اللازم والكافي لتقارب
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو أن يكون:

$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) < \infty : \forall n > N(\epsilon) \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : |j_n - j_{n+N}| < \epsilon$ وهو تعريف تقارب
 المتتالية j_n .

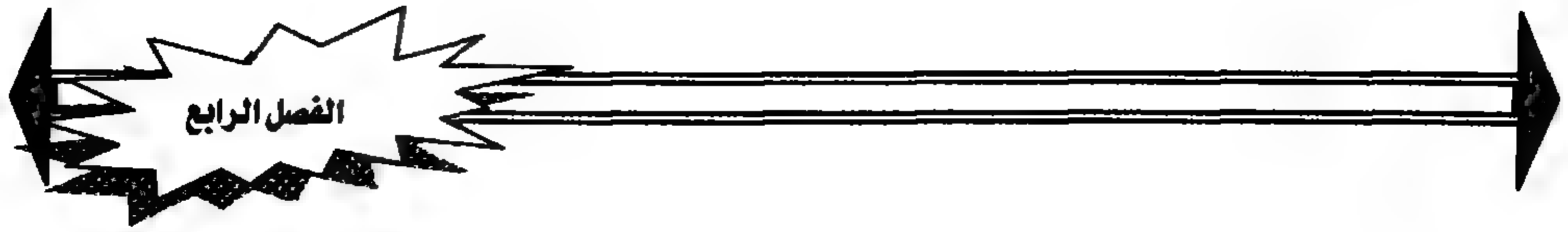
(ملاحظة هامة): أن حذف عدد منته من بداية المجموع لا يؤثر في نوعه من ناحية
 التقارب والمتباعد.

الخواص الخطية للمتسلسلات العددية:

$$١- \text{ إذا كان } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = j \text{ ، } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = k \text{ ، } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = j + k$$

$$٢- \text{ إذا كان } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = j \text{ ، } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = k \text{ ، } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = j - k$$

في الواقع أن الشروط الواردة ضمن هاتين الخاصيتان هي شروط كافية
 وغير لازمة , أي انه يمكن أن يتقارب المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دون أن تكون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة , بفرض المتتالية $a_n = \frac{1}{n}$ ان المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدتان عندئذ وبملاحظة ان:



معنا في مثال سابق . $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} = 1$ وهي متقاربة حسب ما ورد

شرط كوشي لتقارب المتسلسلات العددية:

إذا حققت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ شرط كوشي للمتتاليات أي كانت $\{a_n\}$ كوشية - عندئذ - فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ويمكن كتابة الشرط بالشكل:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N(\epsilon) \quad |a_n - a_m| < \epsilon$$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N(\epsilon) \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k \right| < \epsilon$$

وهو شرط كوشي لتقارب المتسلسلات العددية.

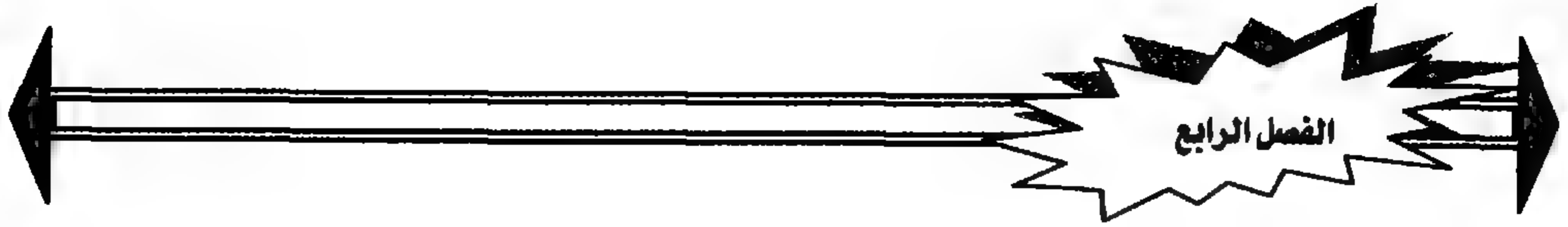
معايير تقارب المتسلسلات العددية:

سنقسم معايير التقارب من حيث إشارة المتسلسلات إلى ثلاثة أقسام:

١ - المتسلسلات ذات الإشارة الموجبة:

تعريف: نقول أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة ذات إشارة موجبة إذا كانت $a_n \geq 0$:

أ- المعيار الأول: يعتمد هذا المعيار على المبرهنة ٣- على تعريف متتالية المجاميع الجزئية وذلك بملاحظة أنه إذا كانت $a_n \geq 0$ \iff $\{a_n\}$ متتالية متزايدة فإذا كانت $\{a_n\}$ محدودة أمكن الجزم بأنها متقاربة وبالتالي أمكن الجزم بأن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.



ب- معايير المقارنة:

١- إذا كان $a_n \geq b_n$ ولو بدءاً من حد معين عندئذ إذا كانت

أ- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وذلك لأن إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة

⇐

جـ $= b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$ متقاربة لكن $a_n \geq b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq$

$a_1 + \dots + a_n =$ جـ و جـ متزايدة ومحدودة وبالتالي متقاربة ⇐

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

ب- إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة وذلك لأن جـ متزايدة

ولدينا أيضاً أن جـ \leq جـ و جـ متباعدة حسب الفرض ⇐ جـ

متباعدة ⇐ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة.

٢- إذا $m \leq \frac{a_n}{b_n} \leq M$ فإن المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من نوع واحد حيث

التقارب والتباعد في الواقع إذا كتبنا $m \leq a_n \leq M \cdot b_n$.

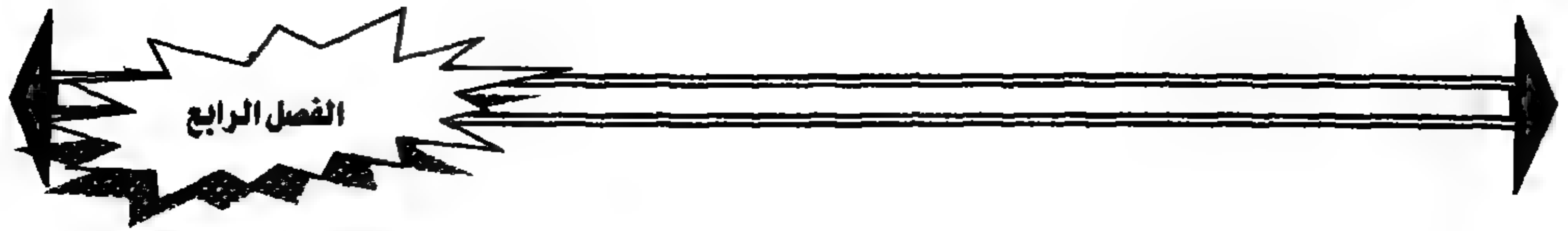
فإذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة فإنه بتطبيق المعيار (١) الحالة ب نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

متباعدة.

وإذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة فإنه بتطبيق المعيار (١) الحالة أ نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

متقاربة.

٣- إذا كانت نها $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ حيث $0 < L < \infty$ فإن المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$



ونجيب عن من نوع واحد ثبت هذا المعيار بسهولة إذا لاحظنا أن $\epsilon <$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - l \right|$$

$$\epsilon - \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| > \epsilon - \epsilon > 0 \iff \epsilon - \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| > 0 \iff \epsilon - \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| > 0$$

وبتطبيق المعيار -٢- نجد النتيجة:

٤- إذا كان $\frac{1+a_n}{b_n} \leq \frac{1+a_{n+1}}{b_{n+1}}$ ولو بدءاً من حد معين فإن تقارب $\frac{a_n}{b_n}$

يؤدي إلى تقارب $\frac{a_n}{b_n}$ وذلك لأنه بملاحظة أن $\frac{1+a_n}{b_n} \leq \frac{1+a_{n+1}}{b_{n+1}}$ ، $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$

$$\dots \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

$$\frac{a_n}{b_n} \times \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \dots \times \frac{1+a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \times \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} \dots \times \frac{1+a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

$$1 + \frac{a_n}{b_n} > 1 + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \iff \frac{1+a_n}{b_n} \geq \frac{1+a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

وبتطبيق معيار المقارنة الأول نجد المطلوب.

٥- إذا كانت $1 < (k)^n \leq a_n$ حيث $1 < k$ ولو بدءاً من حد معين فإن

$\frac{a_n}{b_n}$ متقاربة وذلك لأن $(k)^n$ هو الحد النوني لمتسلسلة هندسية متقاربة

لأن $1 < |k|$ وحسب معيار المقارنة الأول نجد أن $\frac{a_n}{b_n}$ متقاربة.



أمثلة وتطبيقات:

١- بفرض لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ادرس التقارب:

الحل: إذا أجرينا مقارنة هذه المتسلسلة مع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ حسب

معيار المقارنة الأول الحالة أ- نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متقاربة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

وحذف حد لا يؤثر في التقارب $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة.

٢- ادرس فيما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متقاربة.

الحل: أن $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ هـ ت والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة وبالتالي وحسب معيار

المقارنة الأول الحالة ب- فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة.

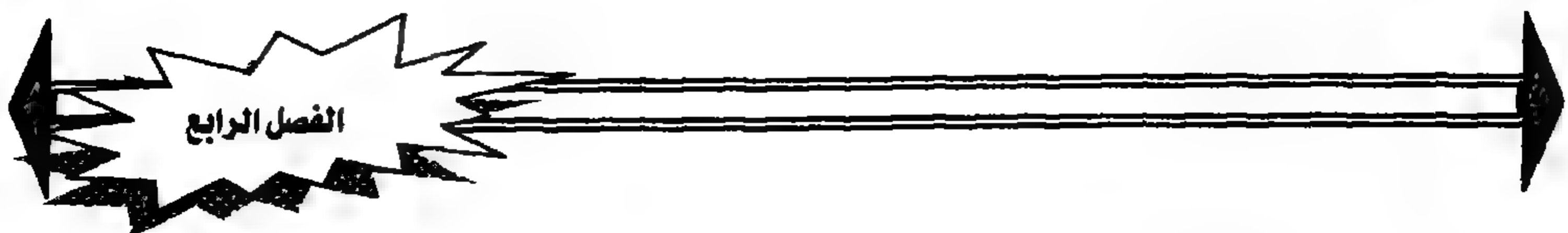
٣- إذا نظرنا إلى المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ نجد أن $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$

وحسب معيار المقارنة الأول الحالة ب- فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متباعدة لأن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

متباعدة.

٤- بملاحظة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$: $p \in \mathbb{R}$ إن هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة

ريمان، الآن لندرس تقارب هذه المتسلسلة.



أولاً: لنلاحظ أنه إذا كان $p > 0 \Leftarrow \infty$ نها $\frac{1}{n} \Leftarrow \infty$ وبالتالي المتسلسلة متباعدة حسب مبرهنة الشرط اللازم للتقارب.

أيضاً إذا كانت $p = 0 \Leftarrow \infty$ نها $\frac{1}{n} \Leftarrow \infty$ متباعدة أيضاً.

ثانياً: لنناقش الحالة $1 \leq p \leq 0 \Leftarrow \infty$ نها $\frac{1}{n} \Leftarrow \infty$ ولدينا المتسلسلة $\frac{1}{n} \Leftarrow \infty$ متباعدة $\Leftarrow \infty$ نها $\frac{1}{n} \Leftarrow \infty$ متباعدة حسب معيار المقارنة الأول الحالة -ب-.

ثالثاً: الحالة $1 < p$ نجد أنه إذا استخدمنا معيار المقارنة الثالث $\frac{1}{n} \Leftarrow \infty$ المتباعدة

نجد أن نها $n^{1-p} \Leftarrow \infty$ نها $\frac{1}{n} \Leftarrow \infty$ المتسلسلتان $\frac{1}{n} \Leftarrow \infty$ ، $\frac{1}{n} \Leftarrow \infty$

ليستا من نوع واحد.

الخلاصة: تكون متسلسلة ريمان $\frac{1}{n} \Leftarrow \infty$ ، متقاربة فقط إذا كان $1 < p$ وما عدا ذلك تكون متباعدة.

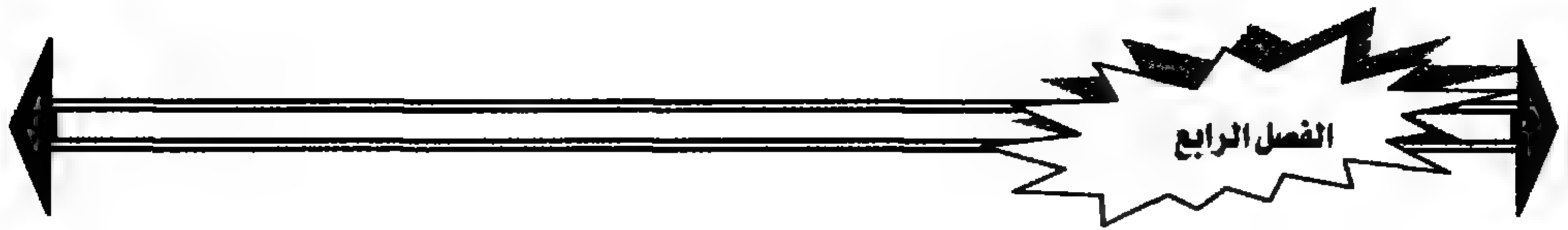
أمثلة وتطبيقات: برهن التقارب وأثبت كلاً من العلاقات التالية:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{(1+n^3)(2-n^3)} \sum_{n=1}^{\infty} = 2I - 2 \quad \frac{2}{3} = \frac{(1-n)}{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} = 1I - 1$$

الحل: ١- من أجل $\frac{(1-n)}{(2)} \sum_{n=1}^{\infty}$ لتشكل متتالية المجاميع الجزئية بالشكل:

$$ج = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots$$





$$\left(\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) - \left(\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) =$$

الآن بالنسبة للمقدار $\left(\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$ هو متسلسلة هندسية حدها

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} \leftarrow \text{مجموعها يساوي } \frac{1}{2} = \text{أساسها } r = 1$$

أما المقدار $\left(\dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$ متسلسلة هندسية حدها الأول $\frac{1}{2} =$

$$\frac{2}{3} = \frac{1 - (-1)^{\infty}}{1 - (-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \leftarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} \leftarrow \text{مجموعها يساوي } \frac{1}{2} = \text{أساسها } r = 1$$

$$\text{نها جن } \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}$$

٢- بالنسبة للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^3)(2-n^3)}$ فإن حدها العام يمكن كتابته

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{(1+n^3)(2-n^3)} \left[\frac{1}{1+n^3} - \frac{1}{2-n^3} \right] \text{ وبتشكيل الحد العام}$$

للتالية المجاميع الجزئية المنتهية نجد أن:

$$\text{جن} = \frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{1}{2-(1+n)^3} - \frac{1}{2-n^3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2-1^3} - \frac{1}{2-0^3} \right) \right]$$

$$\frac{1}{3} = \left[\frac{1}{2-(1+n)^3} - 1 \right] \leftarrow \text{نها جن}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{(1+n^3)(2-n^3)} \sum_{n=1}^{\infty} \leftarrow \frac{1}{3} =$$





ج- معايير شهيرة للمتسلسلات الموجبة:

أ- معيار دالامبير:

نلخص معيار دالامبير بالشكل:

أولاً: نكتب حد دالامبير للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بالشكل $\langle a_n \rangle = \frac{1+a_n}{a_n}$.

ثانياً: نحسب نهاية حد دالامبير $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n \rangle = \langle \rangle$.

ونميز الحالات الثلاثة التالية:

أ- إذا كان $\langle \rangle < 1$ فإن المتسلسلة تكون متقاربة.

ب- إذا كان $\langle \rangle > 1$ فإن المتسلسلة تكون متباعدة.

ج- إذا كان $\langle \rangle = 1$ يفشل هذا المعيار.

البرهان: بالنسبة للحالة أ- فإنه إذا كانت $\langle \rangle < 1$ نها $\frac{1+a_n}{a_n}$ بدءاً من حد

معين فإن $\langle \rangle < 1$ وبملاحظة أن:

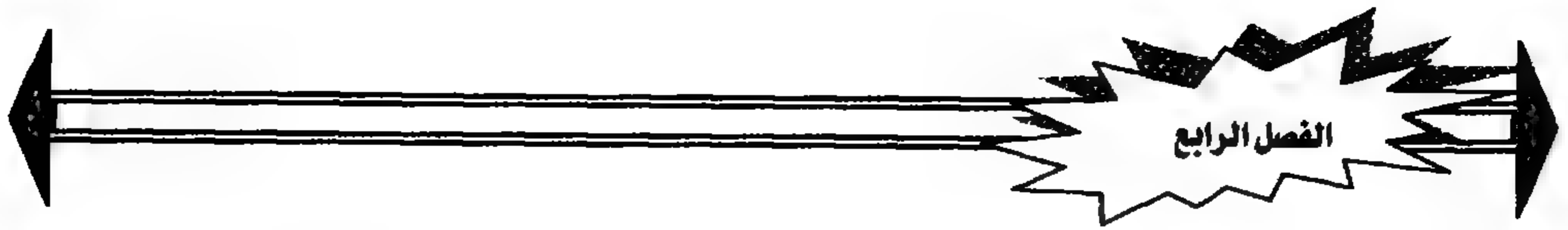
$$\langle \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a_n}{a_n} \iff \frac{1+a_n}{a_n} > \frac{1+a_{n+1}}{a_{n+1}} \dots (*)$$

وبالنظر إلى المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \langle a_n \rangle$ نجد أنها هندسية فيها $\langle \rangle < 1$ وبالتالي فهي

متقاربة. وبتطبيق معيار المقارنة الرابع على العلاقة (*) والأخذ بعين الاعتبار

تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \langle a_n \rangle$ نجد أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.





بالنسبة للحالة -ب- فإنه إذا كان لدينا $1 > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+u_n}{u_n}$ فإنه بدءاً من حد

معين نجد أن:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+u_n}{u_n} > 1$ وبمناقشة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ الهندسية المتباعدة وإجراء معيار المقارنة

الرابع نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متباعدة.

بالنسبة للحالة -ج- تبرر على أساس أنه بالنسبة للمتسلسلة المتباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ نجد أن } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{1/n} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+u_n}{u_n} \text{ وبالنسبة}$$

$$\text{للمتسلسلة المقارنة } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ نجد أن: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+u_n)/1}{n^2/1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)}{(1+n)^2} = 1$$

وبالتالي حصلنا على النتيجة $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+u_n}{u_n} = 1$ من أجل متسلسلة مقاربة وأخرى

متباعدة وبالتالي فلا يمكننا الحكم على تقارب أو تباعد المتسلسلة إذا

كان $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+u_n}{u_n} = 1$

٢- معيار كوشي الجذر النوني:

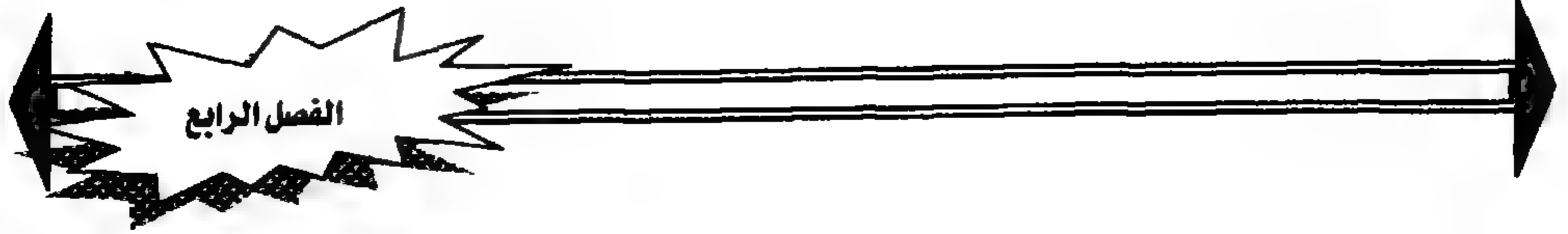
نورد هذا المعيار بالشكل:

أولاً نشكل حد كوشي $\sqrt[n]{u_n} = v_n$ وبأخذ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = v$ نميز الحالات

التالية:

أ- إذا كان $v > 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة.





ب- إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

ج- إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ فإن المعيار يفشل.

البرهان: من أجل الحالة أ- نلاحظ أنه إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$ فإنها $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$ يوجد k بحيث أنه بدءاً من حد معين يكون $1 < k < \sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$ (ك) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$ وحسب معيار المقارنة الخامس نجد أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، أما من أجل ب- نلاحظ أنه إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > 1$ فإنها $\sum_{n=1}^{\infty} a_n > 1$ يوجد k بحيث أن بدءاً من حد معين نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < k < 1$ (ك) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$

وبملاحظة أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة هندسية متباعدة لأن $l < k$ وحسب معيار المقارنة الأول الحالة ب- نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

ومن أجل الحالة ج- فإننا نجد أنه من أجل المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$ والمتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < 1$ أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$

وبالتالي فإننا في هذه الحالة لا نستطيع الحكم على تقارب المتسلسلة.

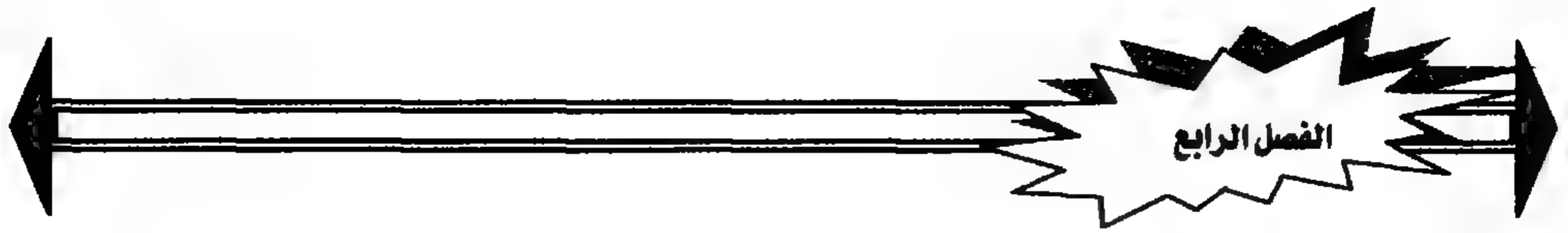
٣- معيار راب:

نشكل أولاً حد راب $\left(\frac{a_n}{1+a_n} - 1 \right) \cdot n = r_n$ ونحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = z$

ونميز الحالتين التاليتين:

أ- إذا كان $z > 1$ تكون المتسلسلة متقاربة.





ب- إذا كان $1 \leq z$ تكون المتسلسلة متباعدة.

البرهان: بالنسبة للحالة -أ- نجد أن إذا كان $1 \leq z$ فإنه بدءاً من حد معين نجد أن:

$$\frac{n}{1+n} > \frac{1+n}{n} \iff \frac{1+n}{n} = 1 + \frac{1}{n} < \frac{n}{1+n} \iff 1 < \left(\frac{n}{1+n} - 1 \right) > \frac{n}{(1+n)^2}$$

وباختيار المتسلسلة المقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ؛ $1 > z$ وتطبيق معيار المقاربة الرابع على الحالة التي لدينا نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متقاربة.

أما من أجل الحالة -ب- نجد أن $\frac{n}{1+n} \leq 1 + \frac{1}{n}$

$$\frac{n}{1+n} \leq 1 + \frac{1}{n} \iff \frac{n}{1+n} \leq \frac{1+n}{n} \iff \frac{n}{1+n} \geq \frac{n}{1+n} \iff \frac{n}{1+n} = \frac{n}{1+n}$$

متباعدة وحسب معيار المقارنة الرابع نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة.

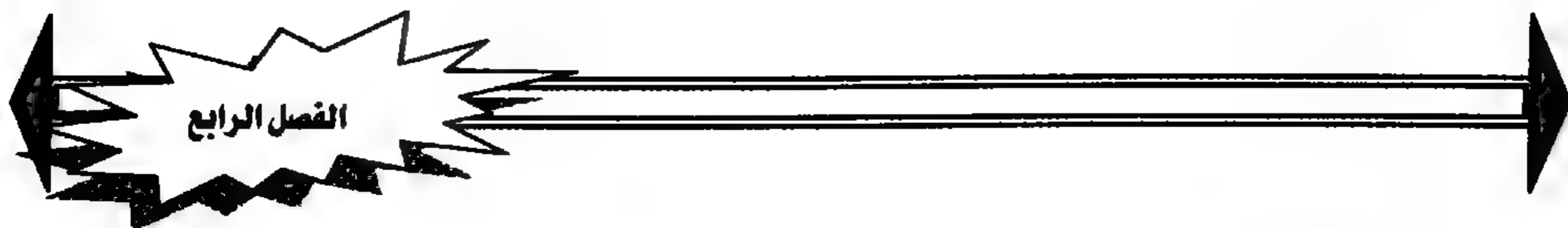
٤- معيار كومير:

نشكل أولاً الحد $u_n = \frac{1}{1+n}$ - حيث $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$ متباعدة

ومن ثم نحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ ونميز الحالتين:

أ- إذا كانت $1 > k$ فإن المتسلسلة متقاربة.





ب- إذا كانت $1 \leq k$ فإن المتسلسلة متباعدة.

البرهان: من أجل الحالة أ- نجد أنه إذا كان $k_n < 0$ فإنه بدءاً

من حد معين نجد أن:

$$k_n < 0 \iff \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n} - \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}} < 1 \iff \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n} < \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}} + 1$$

$\iff \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n} - \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}} < 1 \iff \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n} < \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}} + 1$
وبالتالي الحد $\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n}$ متناقص ومحدود من الأدنى بالصفر \iff

نها $\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n} = 0$ ولدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n} - \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}})$ ذات
متتالية مجاميع جزئية لها الشكل: $\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_1} + (\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_2} - \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_1}) + (\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_3} - \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_2}) + \dots + (\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n} - \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}})$

\iff نها $\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n} = 0$ ، الآن بملاحظة أن $1 < k$ $\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n} - \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}} > 0$

$$\iff k > 1 + \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n} - \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}}$$

وباعتبار أن $\sum_{n=1}^{\infty} (\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n} - \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}})$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n}$

متقاربة حسب معيار المقارنة الأول الحالة أ-.

أما من أجل الحالة ب-: نجد إذا كانت $1 \leq \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n} - \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}}$

$$\iff \frac{1 + \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n}}{1 + \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}}} = \frac{\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n}}{1 + \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}}} \leq \frac{1 + \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n}}{1 + \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}}} \iff \frac{1 + \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n}}{\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_n}} \geq \frac{1 + \text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}}}{\text{ص} \cdot \frac{1}{1+k_{n-1}}} \iff$$



وباعتبار أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة فرضاً فإنه وحسب معيار المقارنة الرابع فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متباعدة.

هـ - معيار غاوس:

إذا أمكن كتابة الحد $\frac{1}{n}$ بالشكل: $\frac{1}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{\mu}{n} + \lambda$ حيث $\theta, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ مقدار محدود عندئذ فإن:

أ- تكون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متقاربة إذا كانت $\lambda > 1$ أو $[\mu > 1, \lambda = 1]$

ب- تكون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متقاربة إذا كانت $\lambda < 1$ أو $[\mu \leq 1, \lambda = 1]$

البرهان: بالنسبة للحالة أ- نجد أنه إذا كان $\lambda > 1$ فإن $\lambda > 1$

$$\frac{1}{n} \leftarrow \frac{1}{1+n}$$

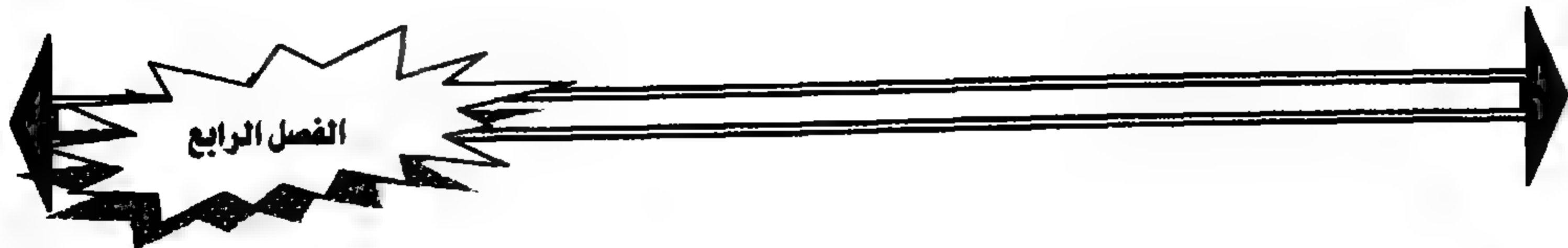
$1 < \lambda < \frac{1+n}{n}$ وحسب معيار دالامبير نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متقاربة.

أما إذا كان $\lambda = 1$ عندئذ فإنه وحسب معيار راب نجد أن: $1 = \frac{1}{1+n}$

$$\frac{\theta}{n} + \frac{\mu}{n} +$$

$$\mu + \frac{\theta}{n} = \left(1 - \frac{1}{1+n}\right) n \Leftarrow$$

فإذا كان $\mu > 1 \Leftarrow$ يصبح لدينا $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+n}\right) n = \infty$ وبالتالى



حسب معيار راب نجد أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

بالنسبة للحالة -ب-: نجد أنه إذا كان $\lambda < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1+a_n} < 1$

وحسب معيار دالامبير

$\Leftrightarrow 1 > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

أما إذا كان $\lambda = 1$ فإن $\frac{a_n}{1+a_n} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta}{n^2} \Leftrightarrow n \left(1 - \frac{a_n}{1+a_n}\right) = \mu + \frac{\theta}{n}$

$\mu + \frac{\theta}{n} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta}{n} = \mu \geq 1 \Leftrightarrow$ المتسلسلة حسب معيار راب متباعدة.

٦- معيار كوشي التكاملي:

بفرض لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة عندئذ بفرض لدينا التابع

ق(س) بحيث أن ق(ن) = $\sum_{n=1}^N a_n$ عندئذ إذا أوجدنا التكامل $\int_1^{\infty} ق(س) د س$

وكان موجوداً فإن المتسلسلة متقاربة وإذا كان غير موجودة فإن المتسلسلة

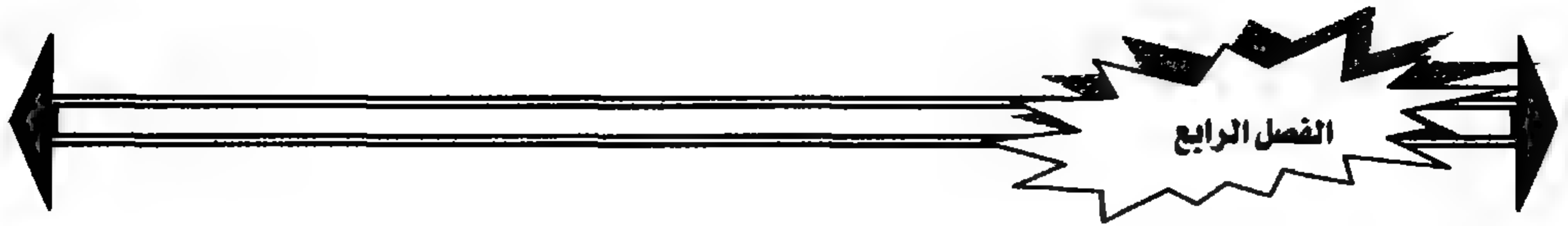
متباعدة وإذا كان ق(س) تابعاً أصلياً للتابع ق(س) فإن

$$\int_1^{\infty} ق(س) د س = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k - ق(1) \right).$$

٧- المعيار التلسكوبي:

بفرض لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ وأمكن كتابة حدود $\{a_n\}$ على شكل فرق تقديمي

للمتتالية المتناقصة $\{b_n\}$ بالشكل $a_n = b_n - b_{n+1}$ عندئذ فإن المتسلسلة $\{a_n\}$



والمتتالية $\{b_n\}$ من نوع واحد من حيث التقارب والتباعد.

البرهان: بملاحظة أن $a_n = b_n - b_{n+1}$ ولنشكل متتالية المجاميع الجزئية لـ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$$ج_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n \Leftarrow ج_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n+1})$$

$$\Leftarrow ج_n = b_1 - b_{n+1}$$

$\Leftarrow \{b_n\}$ ، $\{ج_n\}$ من نوع واحد.

\Leftarrow المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\{b_n\}$ من نوع واحد من حيث التقارب والتباعد.

$$\text{مثال: } a_n = \frac{1}{n(n+1)} \text{ إذا فرضنا } b_n = \frac{1}{n} \text{ نجد أن } a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$b_n - b_{n+1}$$

$$\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ و } \{b_n\} \text{ من نوع واحد ولدينا } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{صفر} \Leftarrow \{b_n\}$$

مقاربة.

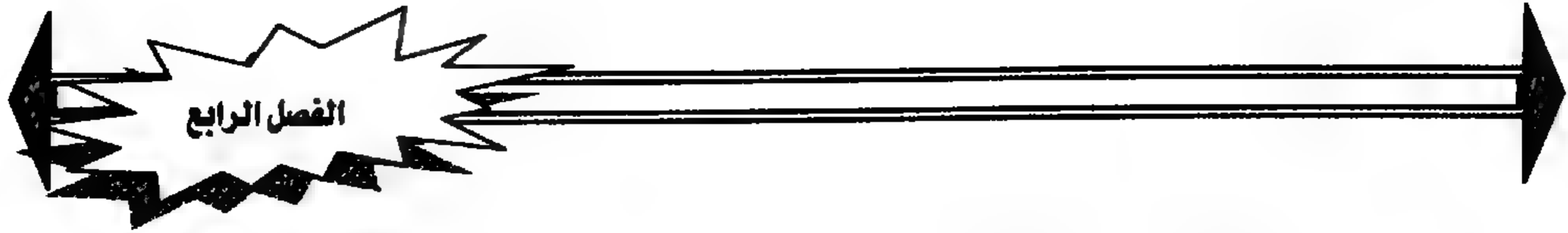
$$\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ مقاربة.}$$

٨- معيار كوشي من أجل المتسلسلات المتناقصة.

إذا كانت لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ حيث $\{a_n\}$ متتالية متناقصة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (a_n)^n$ نوع واحد.





٩- معيار كوشي المصمم من أجل المتسلسلات المتناقصة "وهذا المعيار من عملنا".

إذا كان لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ حيث $\{a_n\}$ متتالية متناقصة عندئذ فإننا نميز الحالتان:

١- إذا كان $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} \Leftarrow$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

٢- إذا كان $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \Leftarrow$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

ملاحظات هامة على معايير التقارب للمتسلسلات الموجبة:

١- يعتبر معيار كوميتر حالة عامة لكلاً من معيار دالامبير ومعيار راب ذلك لأنه:

$$١- \text{إذا اخترنا } v_n = 1 \Leftarrow 1 - \frac{a_n}{1+a_n} = k_n. \text{ وعندها إذا كان } k_n < 0$$

\Leftarrow

$$0 < 1 - \frac{a_n}{1+a_n} \Leftarrow \frac{a_n}{1+a_n} < 1 \Leftarrow \frac{1+a_n}{a_n} < 1 \Leftarrow \frac{1}{a_n} < 1 \Leftarrow \frac{1}{a_n} < \infty$$

والمتسلسلة متقاربة حسب دالامبير.

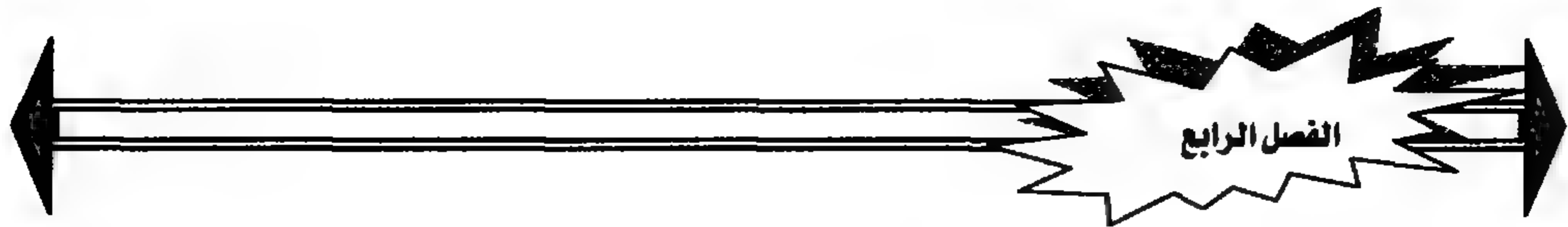
$$\text{وإذا كان } 0 < k_n \Leftarrow 1 - \frac{a_n}{1+a_n} < 1 \Leftarrow \frac{a_n}{1+a_n} > 0 \Leftarrow \frac{1+a_n}{a_n} > 1$$

$$\frac{1+a_n}{a_n} > 1 \Leftarrow \frac{1}{a_n} > 1 \Leftarrow \frac{1}{a_n} > \infty \text{ والمتسلسلة متباعدة. حسب دالامبير.}$$

$$\text{ب- إذا اخترنا } v_n = n \Leftarrow (n+1) - \left(\frac{a_n}{1+a_n}\right)n = k_n = \left(\frac{a_n}{1+a_n} - 1\right)n$$

$1 + r_n = 1 +$ وينفس المناقشة السابقة نحصل على المطلوب.





٢- يعتبر معيار غاوس أيضاً معياراً عاماً لكل من معيار دالامبير وراب وذلك إذا أخذنا بعين الاعتبار أنه من أجل: -أ- معيار راب: نجعل $\theta_n = 0$ و $\lambda = 1$ فنحصل على شروط راب.

ب- معيار دالامبير: نجعل $\theta_n = 0$ و $\mu = 0$ فنحصل على شروط دالامبير.

٣- يكون معيار الأمبير صغيراً في حالات وجود المؤثر العاملي أو الأسس من الشكل n^m في الحد العام للمتسلسلة.

٤- يكون معيار كوشي - الجذر النوني: مفيداً في حالات وجود الأسس من الشكل n^n أو n^m في الحد العام للمتسلسلة.

٥- إذا فشل معيار دالامبير في كشف نوع المتسلسلة فإن معيار كوشي سيفشل حتماً والعكس غير صحيح بالضرورة.

وهذا نعبر عنه بالشكل إذا كان $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l$ \Leftarrow $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{l}$

٦- يمكن استخدام معيار كوشي التكامل في مجالات يكون فيها الحد العام للمتسلسلة معقداً ومرهقاً حسب المعايير الأخرى.

أمثلة وتطبيقات: ادرس تقارب كلاً من المتسلسلات العددية التالية:

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(\frac{1}{n} + 2\right)^n}$$

$$3 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{((1-2n)!!}{(2n)} \right] \quad 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^3}{3 + n^3}$$



$$-5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n!)^2}$$

$$\frac{\frac{1^2 (1+n)}{1! (1+n)^2}}{\frac{1^2 (n)}{1! (n)^2}} = \text{الحل: بالنسبة لـ ١ - بملاحظة حد دالامبير دن}$$

$$\frac{1^2 (1+n)}{(1+n^2)(2+n^2)} = \frac{1^2 (2n)}{1^2 (n)} \times \frac{1^2 (1+n)}{1^2 (2+n^2)} = \text{دن} \Leftarrow$$

$$1 > \frac{1}{4} = \frac{1^2 (1+n)}{(1+n^2)(2+n^2)} \text{ دن } \xrightarrow{x \leftarrow n} \text{ المتسلسلة متقاربة لأن نها دن}$$

$$\frac{1^2 n}{1^2 (n)} - \frac{1^2 n}{1^2 \left(\frac{1}{2} + 2\right)} = \text{بالنسبة لـ ٢ - نلاحظ أن حد كوشي ص} \text{ دن}$$

$$\text{نها ص} \text{ دن} = \text{نها} \xrightarrow{x \leftarrow n} \frac{1^2 n}{1^2 \left(\frac{1}{2} + 2\right)} = \frac{1}{2} > 1 \Leftarrow \text{المتسلسلة متقاربة}$$

بالنسبة لـ ٣ - بملاحظة معيار غاوس والتركيب:

$$= \left[\frac{1^2 (2+n^2)}{1^2 (1+n^2)} \times \frac{1^2 (1-n^2)}{1^2 (n^2)} \right] = \left[\frac{1^2 (1+n^2)}{1^2 (2+n^2)} \right] \div \left[\frac{1^2 (1-n^2)}{1^2 (n^2)} \right] = \frac{1^2}{1+n^2}$$

$$\frac{1}{1^2 (1+n^2)} + \frac{2}{1+n^2} + 1 = \left[\frac{1^2}{1+n^2} + 1 \right] \text{ وبملاحظة أن } \lambda = 1, \mu = 2, \text{ عندئذ}$$

فإن المتسلسلة متقاربة.

بالنسبة لـ ٤ - نلاحظ أن حد راب بالشكل:

بالنسبة لـ ٥- نستخدم معيار كوشي التكاملي وذلك بوضع $Q(s) =$

التكامل موجود \Leftarrow المتسلسلة متقاربة.

معايير تقارب المتسلسلات المتناوبة:

ان < ٠ أى موجبة تماماً عندئذ تسمى هذه المتسلسلة متسلسلة متناوبة.

إن أكثر المعايير شهرة من أجل هذه المتسلسلات هو معيار لايبنتز.

معیار لاپیتیز:

ونها $\lim_{n \rightarrow \infty} = 0$ عندئذ فإن المتسلسلة تكون متقاربة.

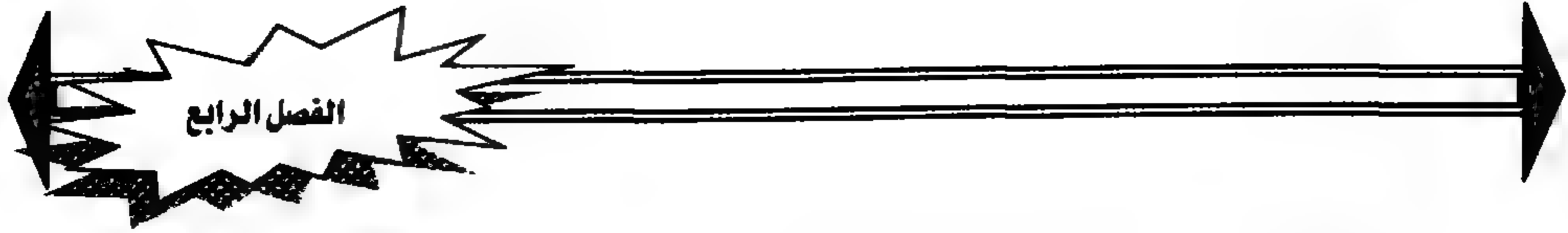
البرهان: بملاحظة متتالية المجاميع الجزئية نجد أن:

جن = (۱ - ۲) + (۲ - ۳) + + (۱۰ - ۱۱) الآن بكتابة

$$P_n = (1 + P_1 + P_2 + \dots + P_n) = \text{جن}$$

$$جَن = ۱پ + (۲پ - ۲پ) + (۳پ - ۴پ) + + ۲۲پ$$

وبملاحظة أن $a_{n+1} - a_n \leq 0$ لأن $\{a_n\}$ متناقصاً فرضاً.



عندئذ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ لأنها جـ ٢ لأن $\frac{1}{n} > 0$.

أي أن $\{ \frac{1}{n} \}$ متقاربة وبملاحظة أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} + \frac{1}{n}) = 0$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ لكن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ وذلك من الفرض.

وبالتالي فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ وحسب المبرهنة ١٠ - فإن جـ ٢

متقاربة وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ من متقاربة. وهو المطلوب.

ملاحظة هامة: إن الشروط الواردة في شرط لايبنتيز شروط كافية ولازمة للتقارب.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

الحل:

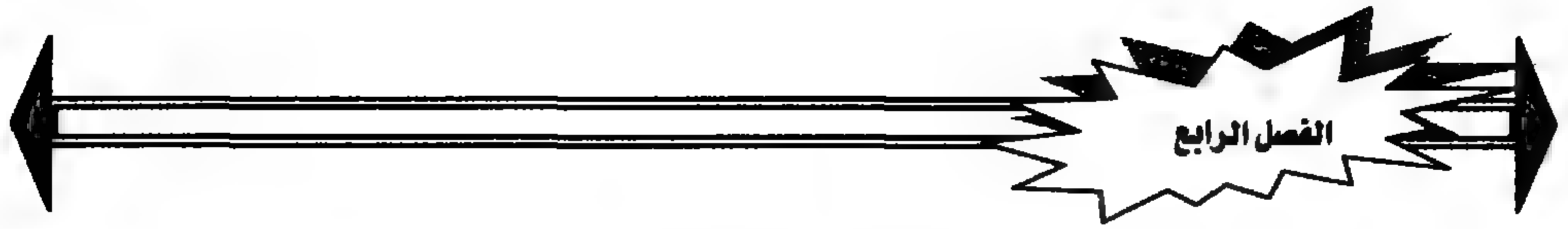
بملاحظة أن $0 < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n}$ فإن $\{ \frac{1}{n} \}$ متناقصة.

ولدينا أيضاً $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ وبالتالي فالمتسلسلة متقاربة حسب لايبنتيز.

المتسلسلات الكيفية:

تعريف: نسمي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة كيفية إذا كانت إشارة حدودها لا تتبع تناوباً أو انتظاماً.

وسنعرض الآن مفهوماً مهماً للتقارب وهو التقارب بالإطلاق.



تعريف: نقول أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة بالإطلاق إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة.

مبرهنة: إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

البرهان: في الواقع بوضع شرط كوشي على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ نجد أن

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N(\epsilon) : m, n > N(\epsilon) \implies |a_m + a_{m+1} + \dots + a_n| < \epsilon$$

$$\iff |a_m| + |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \epsilon$$

$$\iff |a_m| < \epsilon$$

وبملاحظة أن $|a_m| + |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \epsilon$ فإن

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n| < \epsilon$$

ومن خواص القيمة المطلقة $|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n| < \epsilon$

وعندها فإن شرط كوشي محقق من أجل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ وبالتالي فهذه

المتسلسلة متقاربة.

ملاحظة هامة: في الواقع من مفهوم التقارب بالإطلاق نحصل على طريقة

لدراسة تقارب المتسلسلات الكيفية وذلك بدراسة متسلسلة القيم المطلقة

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ كمتسلسلة موجبة فإذا كانت الأخيرة متقاربة. أمكننا الجزم بأن

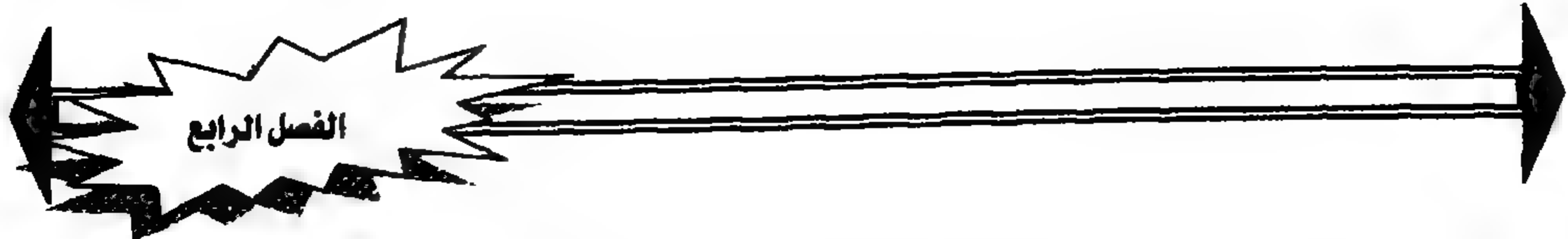
المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة أما إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدة فإن هذا لن يفيدنا في

دراسة تقارب المتسلسلات $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ومما سبق يمكننا إعادة جميع معايير تقارب المتسلسلات الموجبة من أجل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ حيث $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة كيفية.





مثال: ادرس تقارب المتسلسلة الكيفية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ج٢ان}{٢٣٣}$

الحل: بملاحظة أنه من أجل $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{ج٢ان}{٢٣٣} \right|$ نجد أن $\left| \frac{ج٢ان}{٢٣٣} \right| \geq \frac{١}{٣}$.

من هنا وحسب معيار المقارنة الأول الحالة -أ- فإن:

المتسلسلة $\left| \frac{ج٢ان}{٢٣٣} \right|$ مقرونة بمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{١}{٣}$ متقاربة وبالتالي فهي متقاربة.

← $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ج٢ان}{٢٣٣}$ متقاربة بالإطلاق.

مثال: ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{جا \left(\frac{١-٢٣}{٣} \right)^{٣٣}}{٢٣٣}$

الحل: بملاحظة أن $\left| \frac{جا \left(\frac{١-٢٣}{٣} \right)^{٣٣}}{٢٣٣} \right| \leq \frac{١}{٣}$ ولدينا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{١}{٣}$ متقاربة لأنها

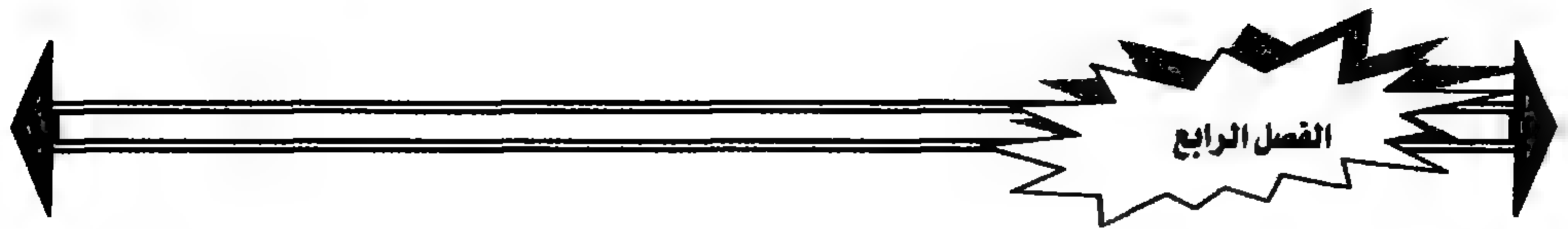
هندسية أساسها $r = \frac{١}{٣} < ١$ وبالتالي حسب معيار المقارنة الأول الحالة -أ- فإن

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{جا \left(\frac{١-٢٣}{٣} \right)^{٣٣}}{٢٣٣}$ متقاربة بالإطلاق.

مبرهنة هامة: إذا كان لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} ا٣$ و $\sum_{n=1}^{\infty} ب٣$ متسلسلتان كقيمتان وكانت

$\sum_{n=1}^{\infty} ا٣$ و $\sum_{n=1}^{\infty} ب٣$ متقاربتان عندئذ تكون المتسلسلات التالية متقاربة أيضاً.

$$١ - \sum_{n=1}^{\infty} |ا٣ . ب٣| \quad ٢ - \sum_{n=1}^{\infty} (|ا٣| + |ب٣|)$$



$$3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

البرهان:

١- من أجل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ب $|a_n|$ ملاحظ العلاقة التالية:

$$0 \leq (|a_n| - |a_{n+1}|)^2 = |a_n|^2 - 2|a_n||a_{n+1}| + |a_{n+1}|^2$$

$$\Leftrightarrow 2|a_n||a_{n+1}| \leq |a_n|^2 + |a_{n+1}|^2$$

وبملاحظة أن الحد الأيمن هو مجموع المتسلسلتان متقاربتان فالمتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |a_{n+1}|$$

\Leftrightarrow المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ب $|a_n|$ قرونة حسب معيار المقارنة الأول الحالة

١- بمتسلسلة متقاربة $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ب $|a_n|$ متقاربة.

٢- من أجل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |a_{n+1}|)^2$ بملاحظة أن:

$$0 \leq (|a_n| + |a_{n+1}|)^2 = |a_n|^2 + 2|a_n||a_{n+1}| + |a_{n+1}|^2 \geq 2(|a_n| + |a_{n+1}|).$$

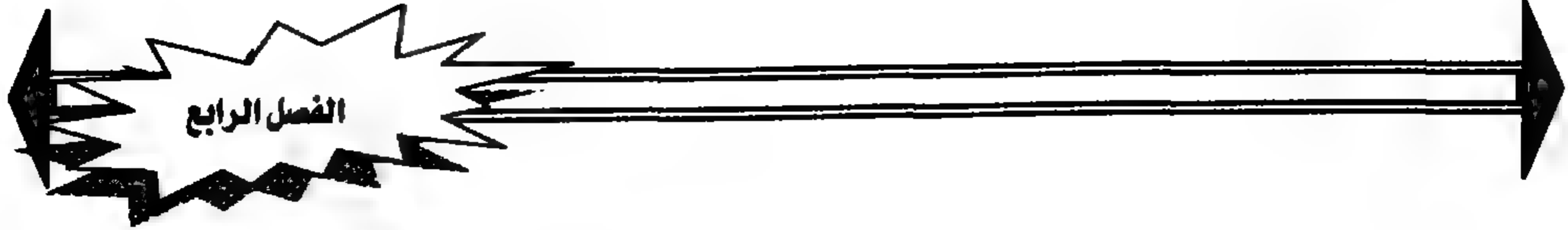
وبالتالي المتسلسلة لدينا مقرونة حسب معيار المقارنة الأول بالمتسلسلة

المتقاربة

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |a_{n+1}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |a_{n+1}|)^2 \text{ متقاربة.}$$

٣- من أجل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ ملاحظ أنه إذا اخترنا $b_n = \frac{1}{n}$ فإن





$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ متسلسلة متقاربة وبتطبيق القسم الأول من المبرهنة فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) \text{ و تمت المبرهنة.}$$

تكملة للمبرهنة السابقة: في الواقع يمكن القول أنه إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ،

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربتان فإن المتسلسلات التالية: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ و

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة بالإطلاق وذلك لأن متسلسلات القيم المطلقة الخاصة بها متقاربة.

سنورد الآن أهم معايير التقارب الخاصة بالمتسلسلات الكيفية:

١ - معيار آبل - ديرخلية: إذا كانت لدينا متسلسلة كيفية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ فإنه إذا كان

١ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة بالإطلاق ب - $\{ \frac{1}{n^2} \}$ محدودة.

فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ متقاربة بالإطلاق.

البرهان: بملاحظة أنه إذا كانت $\{ \frac{1}{n^2} \}$ محدودة فإنه بدءاً من حد معين نجد

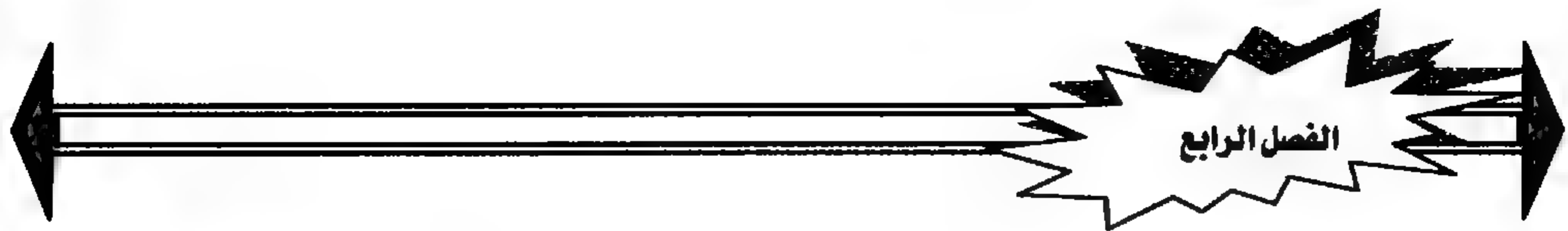
أن $\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{m^2}$ وبملاحظة أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ متقاربة بالإطلاق.

فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة $\iff \frac{\epsilon}{m} < \left| \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \right|$ حسب شرط كوشي للتقارب

$$\text{وبكتابة المقدار } \left| \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \right| \geq \frac{\epsilon}{m} \cdot m \geq \frac{\epsilon}{m} \cdot m = \epsilon$$

\iff المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ متقاربة $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ متقاربة بالإطلاق.





ملاحظة: إن الشروط الواردة في شروط المعيار هي شروط كافية وغير لازمة للتقارب.

نتيجة هامة: في الواقع إذا كانت $\{a_n\}$ متقاربة عندئذ فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وذلك وفقاً لمعيار آبل- دير خليه والبرهان يتم بوضع $a_n = b_n$ و $a_n = b_n$.

وملاحظة أن $\{a_n\}$ متقاربة فرضاً و $\{a_n\}$ محدودة كون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ حسب مبرهنة الشرط اللازم لتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ وبالتالي فإن:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة والأمر أصبح محققاً وبذلك نستطيع الآن كتابة المبرهنة - ١٤ - وفق الصيغة التالية:

إذا كانت كلاً من المتسلسلتان الكيفيتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتان بالإطلاق فإن كلاً من المتسلسلات التالية متقاربة.

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n \quad 2 - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \quad 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

نتيجة هامة: إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة بالإطلاق فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ حيث $b_n \in \mathbb{R}$ ص⁺ متقاربة بالإطلاق.

معيار آبل: إذا كان لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة كيفية فإنه إذا كان:

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma_n \text{ متقاربة.}$$

$$2 - \{a_n\} \text{ محدودة.}$$

$$3 - \{a_n\} \text{ متناقصة عندئذ تكون المتسلسلة } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n.$$



معيار ديرخليه:

إذا كان لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. بن متسلسلة كيفية عندئذ فإنه إذا كان

١- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بن ذات مجاميع جزئية محدودة.

٢- $\{a_n\}$ متناقصة و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. بن تكون متقاربة.

البرهان: بملاحظة أن $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \geq m$ محدودة من أجل $N(\epsilon) > n$ ولدنا من الشرط

$|a_n| \geq 2 - n$ وبكتابة تحويل آبل.

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) b_k + a_n \cdot b_n$$

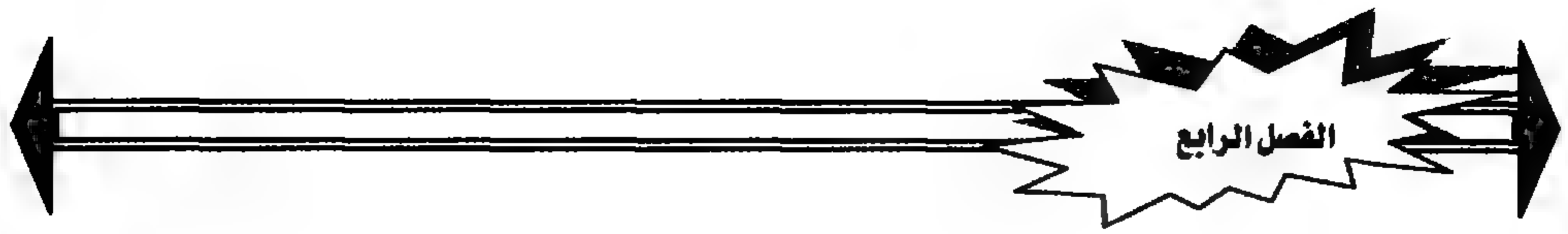
$$\text{ولدنا } \left| \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot b_k \right| \geq (|a_1| - |a_n|) \cdot n \geq \frac{\epsilon}{n} \cdot n = \epsilon$$

← المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. بن متقاربة وفق شرط كوشي.

ملاحظات هامة:

١- إن معيار آبل ينتج من معيار ديرخليه وذلك بملاحظة أن كل متالية متقاربة محدودة.

٢- إن معيار لايبنتز يعتبر حالة خاصة من معيار ديرخليه حيث إذا وضعنا $b_n = (1-n)^n$ في معيار ديرخليه نحصل على معيار لايبنتز.



مثال هام:

برهن أنه إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية متناقصة وتسعى إلى الصفر فإن كلاً من المتسلسلتين التاليتين تكون متقاربة.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ جتا } (n \text{ س}).$$

الحل: من أجل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ جتا } (n \text{ س})$ إن شروط معيار ديرخليه محققة عليها ما عدا الشرط الأول وهو $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ جتا } (n \text{ س})$ محدودة.

الآن لتثبت ذلك:

$$\text{لدينا } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ جتا } (n \text{ س}) = | \text{جاس} + \text{جا}^2 \text{ س} + \dots \text{جان س} |$$

الآن سنضرب المقدار ونقسم على $\left(\frac{\text{س}}{2}\right)$ لنجد أن

$$\frac{\left| \text{جا} \left(\frac{\text{س}}{2}\right) + \text{جا} \left(\frac{\text{س}}{2}\right) \text{جا}^2 \text{ س} + \dots + \text{جا} \left(\frac{\text{س}}{2}\right) \text{جان س} \right|}{\left(\frac{\text{س}}{2}\right) \text{جا}} =$$

$$\text{وبملاحظة أن } \text{جا}^\alpha \cdot \text{جا}^\beta = \text{جا}^{\alpha + \beta} \text{ جتا } (\alpha + \beta) \text{ س} - \text{جا}^{\alpha - \beta} \text{ جتا } (\alpha - \beta) \text{ س} =$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ جتا } (n \text{ س}) \right|$$

$$\frac{\left| \left(\text{جا} \left(\frac{\text{س}}{2}\right) - \text{جا} \left(\frac{\text{س}}{2}\right) \text{جا}^2 \text{ س} \right) \frac{1}{2} + \dots + \left(\text{جا} \left(\frac{\text{س}}{2}\right) - \text{جا} \left(\frac{\text{س}}{2}\right) \text{جان س} \right) \frac{1}{2} \right|}{\left(\frac{\text{س}}{2}\right) \text{جا}}$$



$$m \geq \frac{1}{\left| \frac{s}{2} \right|} = \frac{2}{\left| \frac{s}{2} \right|} \geq \frac{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{s}{2} - \frac{s}{2} \right) \right]}{\left(\frac{s}{2} \right)} =$$

وبالتالي تحقق شروط ديرخلية الأول والثاني من أجل $\frac{\infty}{2}$ إن $\left(\frac{s}{2} \right)$ (ن س)
وبالتالي فهي متقاربة.

الآن بالنسبة للمتسلسلة $\frac{\infty}{2}$ إن جتان س يبرهن على تقاربها بنفس
الطريقة السابقة.

تمارين عامة

تمارين المتتاليات العددية:

أ- بين كلاً مما يلي - إذا كانت المتتالية متزايدة أم لا.

$$1 - u_n = \frac{1}{n} \quad 2 - u_n = \frac{n^2}{n!}$$

$$3 - u_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1} \quad 4 - u_n = \frac{(1 - \frac{1}{n})^n}{n}$$

$$5 - u_n = \frac{n^5 + 3}{n^3 + 2}$$

ب- بين في كلاً من المتتاليات التالية إذا كانت محدودة من الأعلى أو الأدنى:

$$1 - u_n = \frac{(1 - \frac{1}{n})^n}{n} \quad 2 - u_n = \frac{1 + n}{n^2 + 2} \quad 3 - u_n = \frac{1 + \sqrt{n}}{1 - \sqrt{n}}$$

$$4 - u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1} + 3}{2 + \sqrt{n}}$$

ج- بين في كلاً مما يلي إذا كانت المتتالية متقاربة وأوجد نهايتها إن أمكن.

$$1 - u_n = \sqrt[3]{n} \quad \text{حيث أن } \sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n-1} + \dots + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{n}$$

$$\sqrt[3]{n+3} = 1 + \sqrt[3]{n}$$

$$2 - u_n = \sqrt[n]{n} \quad 3 - u_n = \frac{(1 - \frac{1}{n})^n}{n} \quad 4 - u_n = \frac{n}{n^2}$$

د- أوجد النهاية العليا والدنيا إن أمكن لكل من المتاليات التالية:

$$1 - a_n = \text{جان} \quad 3 - a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

$$2 - a_n = \frac{(-1)^n \times \text{جان}}{n} \quad 4 - a_n = \frac{(-1)^n \times 3}{2} + \frac{(-1)^n}{2}$$

$$5 - a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

هـ- بين في كلاً مما يلي إذا كانت المتتالية كوشية أم لا:

$$1 - a_n = \text{هـ} \quad 2 - a_n = \frac{n}{n+2} \quad 3 - a_n = \frac{1+n}{2+n}$$

$$4 - a_n = n + \frac{2}{n}$$

و- برهن اعتماداً على معايير تقارب المتسلسلات العددية كما يلي:

$$1 - \text{نها} \quad \leftarrow n = \frac{\text{جان}}{n}$$

$$2 - \text{نها} \quad \leftarrow n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$3 - \text{نها} \quad \leftarrow n = \frac{1}{\sqrt{n \ln n}}$$

$$4 - \text{نها} \quad \leftarrow n = \frac{1+n}{2+n}$$

$$5 - \text{نها} \quad \leftarrow n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

تمارين المتسلسلات العددية

أ- برهن بثلاث طرق مختلفة تباعد كلاً من المتسلسلات التالية:

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{2+n}, \quad 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad 3 - \sum_{n=1}^{\infty} (1-n)^n \text{ جتان}$$

$$4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{i(1+n^2)}$$

ب- باستخدام معيار دالامبير ومعيار كوشي - الجذر النوني ادرس تقارب كلاً من المتسلسلات العددية التالية:

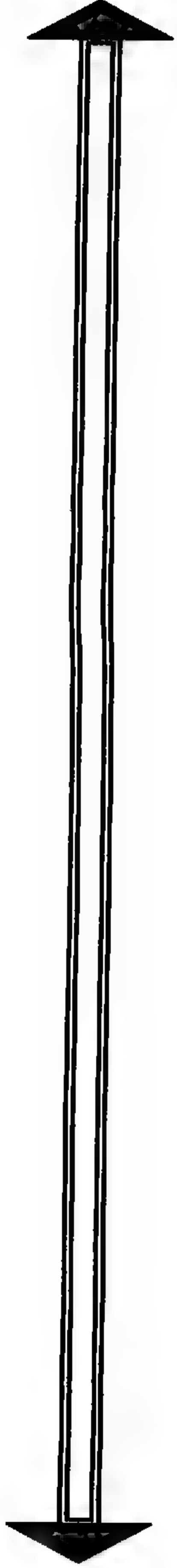
$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}, \quad 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}, \quad 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^3}$$

$$4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+n^2}, \quad 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}, \quad 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n}$$

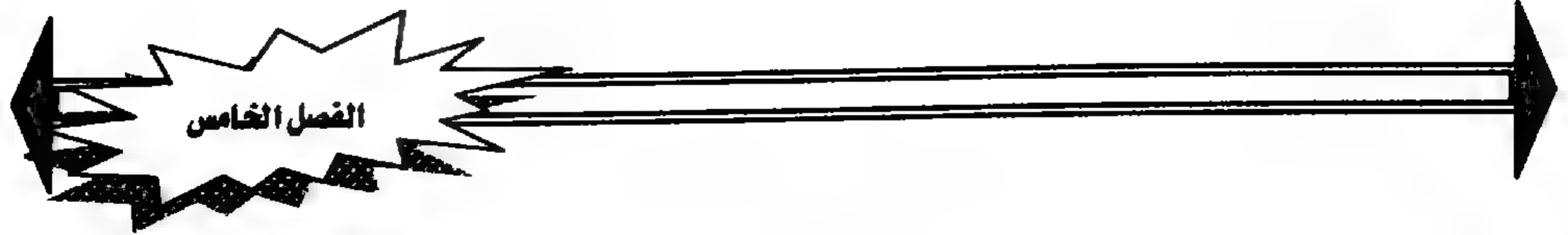
ج- باستخدام معيار راب وغاوس بين تباعد وتقارب المتسلسلات التالية:

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{ii(1+n^2)}{ii(n^2)} \right], \quad 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 i^2}{n}$$

$$3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^4}$$



نظرية الزمر



الفصل الخامس

نظرية الزمر

اهتم الرياضيون القدامى بدراسة متعدد الحدود (Polynomial) وفي كيفية إيجاد جذوره، إذا كان معروفاً ومنذ زمن البابليين بأن جذور متعدد الحدود من الدرجة الثانية $س^2 + ب س + ج$ يمكن حسابها بالدستور

$$س = \frac{1}{2} \left[-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4ج} \right]$$

وفي عام ١٥١٥ تمكن كل من فيرو (Scipio del Ferro) وتاركاً كلياً (Tartaglia) كل على انفراد من التوصل إلى دستور لإيجاد جذور متعدد الحدود من الدرجة الثالثة حيث أن متعدد الحدود

$$س^3 + م س^2 + ب س + ج \dots (١)$$

يمكن تحويله إلى

$$ص^3 + ف ص + ر \dots (٢)$$

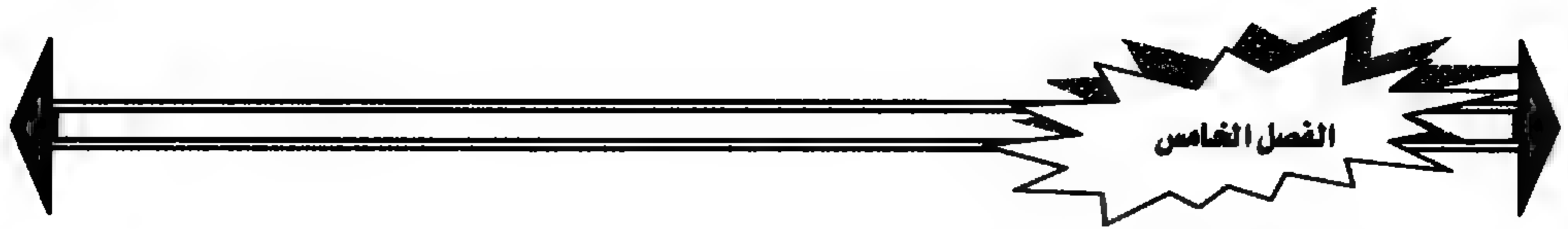
عندما نعوض $س = ص - \frac{م}{٣}$ هذا يعني أن α تكون جذراً إلى متعدد

الحدود (٢) إذا فقط إذا كان $\alpha - \frac{م}{٣}$ جذراً إلى متعدد (١).

نحسب α من الدستور

$$\sqrt[3]{\left[\frac{1}{27} \left(\frac{ر}{٤} + \frac{ف^2}{٢٧} \right) - \frac{ر}{٢} \right]} + \sqrt[3]{\left[\frac{1}{27} \left(\frac{ر}{٤} + \frac{ف^2}{٢٧} \right) + \frac{ر}{٢} \right]} = \alpha$$





ويتم اختبار الجذور التكعيبة بحيث يكون حاصل ضربها مساوياً إلى $\left(\frac{f-3}{3}\right)$ وفي سنة ١٥٤٥ توصل (فيراري) (L. Ferrari) إلى دستور لإيجاد جذور متعدد الحدود من الدرجة الرابعة وفي سنة ١٦٣٧ قدم ديكارت (Descarte) اشتقاقاً رائعاً لهذا الدستور. بعد ذلك استمر الرياضيون لما يقارب ثلاثة قرون في البحث عن دستور لإيجاد جذور متعدد الحدود من الدرجة الخامسة أو أكثر إلى أن تمكن رافيني (Ruffini) في سنة ١٧٩٩ ومن بعده أبيل (Abel) في ١٨٢٧ من البرهنة على عدم وجود مثل هذا الدستور.

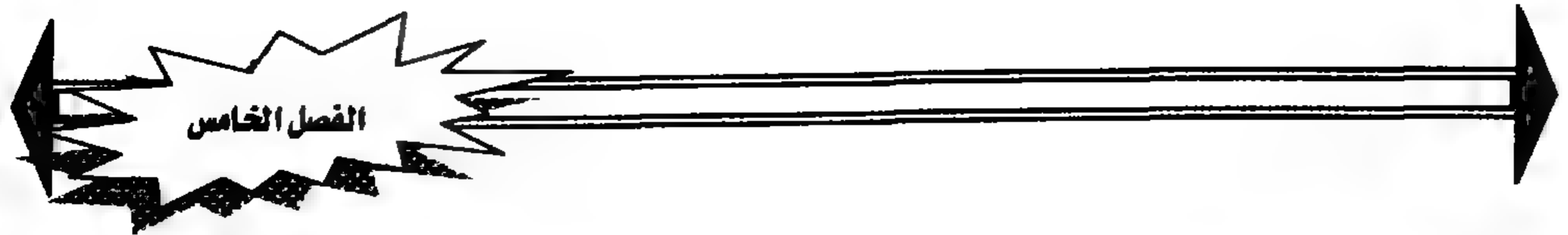
بعد بضعة سنين أخرى تمكن الرياضي العظيم (غالوا) (Evariste Galois) الذي عاش في الفترة (١٨١١ - ١٨٣٢) من تبين أسباب عدم وجود مثل هذا الدستور وذلك من خلال الصلة الموجودة بين زمر التباديل (permutation group) ومتعدد الحدود.

من هنا بدأت دراسة نظرية الزمر التي شكلت فيما بعد خطأ علمياً تجاوز الحدود التي فكر بها غالوا وأصبحت أداة مهمة في مختلف العلوم ولقد كان من أبرز نتائج هذه الدراسة، تصنيف جميع الزمر المنتهية والذي كان نتيجة جهود أكثر من ١٠٠ رياضي قدموا أكثر من ٥٠٠ بحث ما بين (١٩٤٠ - ١٩٨٠) استوعبت أكثر من ١٥٠٠٠ صفحة شكلت مجموعها دراسة متكاملة في تصنيف الزمر البسيطة.

(٢-١) مقدمة في نظرية الزمر:

(٢-١-١) تعريف: إذا كانت Z مجموعة غير خالية فإن كل دالة من $Z \times Z$ إلى Z تدعى عملية ثنائية على Z .





(٢-١-٢) تعريف:

إذا كانت Z مجموعة غير خالية و $*$ عملية ثنائية على Z فإن $(Z, *)$ يسمى نصف زمرة (Semigroup) إذا كان $a * (b * c) = (a * b) * c$ لكل العناصر a, b, c المتتمية إلى Z .

مثال ١: مجموعة الأعداد الطبيعية مع عملية الجمع أو الضرب الاعتيادية تكون نصف زمرة.

(٢-١-٣): تعريف: الزمرة.

نصف الزمرة $(Z, *)$ تسمى زمرة إذا تحققت كل الشروط التالية:

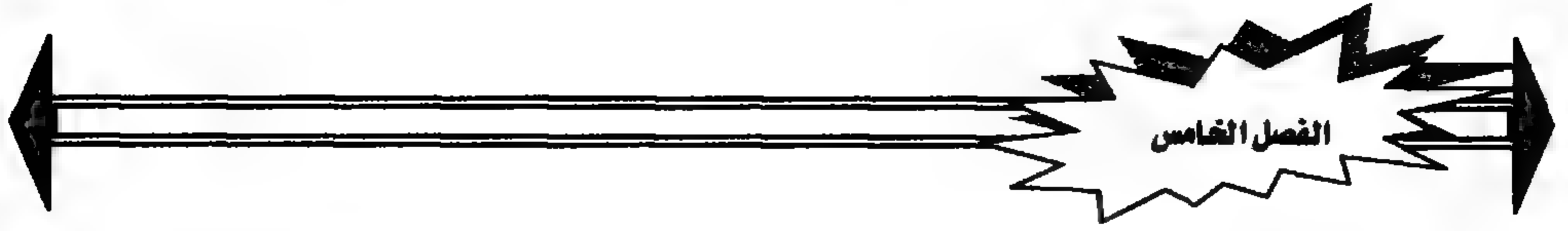
- (أ) يوجد عنصر $e \in Z$ بحيث أن $a * e = a = e * a$ لكل العناصر $a \in Z$.
(ب) لكل عنصر $a \in Z$ يوجد عنصر نظير a^{-1} بحيث أن $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$.
العنصر e في الزمرة أعلاه يسمى عنصراً محايداً بالنسبة للعملية $*$.

مثال ٢: تكون مجموعة الأعداد الصحيحة مع عملية الجمع الاعتيادية زمرة عنصرها المحايد هو الصفر بينما نظير a هو العنصر $-a$.

لا تكون الأعداد الطبيعية مع عملية الجمع الاعتيادية أو عملية الضرب الاعتيادية زمرة. لماذا؟

مثال ٣: لتكن $Z = \{1, -1, i, -i\}$ حيث أن $i^2 = -1$ ولتكن $*$ عملية الضرب الاعتيادية المعرفة على الأعداد العقدية $(Z, *)$ زمرة عنصرها المحايد هو 1 ونظير العنصر i هو $-i$ بينما نظير العنصر -1 هو 1 .





من خلال استخدام مواصفات الزمرة بالإمكان البرهنة على تحقق قانون الحذف بالنسبة للزمر وكما يلي:

لتكن $P, B, G \in Z$, إذا كان $P * B = P * G$ فيوجد عنصر $P^{-1} \in Z$ فإن

$$P^{-1} * P * B = P^{-1} * P * G \implies i * B = i * G \implies B = G$$

وباستخدام خاصية التجميع والعنصر المحايد والنظير للزمر نبرهن أيضاً $P * B = P * G \implies B = G$ وللطالب أن يبرهن وحدانية العنصر المحايد i والعنصر النظير P^{-1} في الزمرة.

(٢-١-٤) مبرهنة:

إذا كانت $(Z, *)$ زمرة وكان كل من P, B عنصراً في Z فإن $(P, B)^{-1} = B^{-1} * P^{-1}$ وكذلك $P^{-1} * (P^{-1})^{-1} = P$.

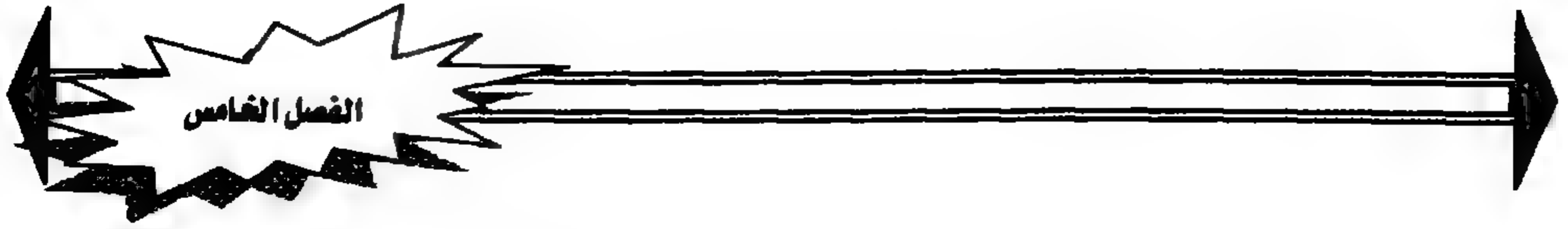
البرهان: P^{-1} نظير P كما أنه نظير $(P^{-1})^{-1}$ إذا $P^{-1} * (P^{-1})^{-1} = e = P * P^{-1}$ $(P^{-1})^{-1} = P \leftarrow (P^{-1})^{-1} = P$ (حسب خاصية الحذف).

كذلك $(P * B)^{-1} = B^{-1} * P^{-1}$ $P = P^{-1} * (P * B) * P = P^{-1} * B * P = P^{-1} * e * P = P$ $e = P^{-1} * P = e * P^{-1} * P = e$.

بما أن $(P * B)^{-1}$ نظير $(P * B)$ وأن العنصر المحايد وحيد فإن $(P * B)^{-1} = (P * B)^{-1} * (P * B) = P^{-1} * B^{-1} * (P * B)$ وباستخدام خاصية الحذف نحصل على $(P * B)^{-1} = B^{-1} * P^{-1}$.

بالإمكان تعميم هذه الخاصية لأكثر من عنصرين لتكون $(P_1 * P_2 * \dots * P_n)^{-1} = P_n^{-1} * \dots * P_2^{-1} * P_1^{-1}$





$a_1 * a_2 * \dots * a_n$ حيث أن a_1, a_2, \dots, a_n

تكون عناصر في الزمرة Z .

(٢-١-٥): تعريف: تسمى الزمرة $(Z, *)$ زمرة منتهية إذا كانت Z مجموعة

منتهية وتسمى الزمرة $(Z, *)$ غير منتهية إذا كانت Z مجموعة غير منتهية.

ويرمز العدد العناصر الموجودة في Z بالرمز $|Z|$ وتسمى رتبة Z ,

والزمرة في المثال الثاني غير منتهية بينما في المثال الثالث الزمرة منتهية

ورتبها 4 أي $|Z| = 4$.

(٢-١-٦) تعريف: تسمى الزمرة $(H, *)$ زمرة جزئية في الزمرة $(Z, *)$ إذا

كانت $H \geq Z$ يعبر عن ذلك بالرمز $H \geq Z$ عندما تكون $(H, *)$ زمرة

جزئية في الزمرة $(Z, *)$ ولكن $H \neq Z$ فإننا نكتب $H \geq Z$ ، واضح أن Z

$\geq Z$ وكذلك $I = \{i\} \geq Z$.

يسمى كل من الزمرتين $(Z, *)$ و $(I, *)$ زمرة جزئية تافهة في الزمرة Z .

(٢-١-٧) تعريف: إذا كانت $(H, *)$ زمرة جزئية في الزمرة $(Z, *)$ فإن $(H, *)$

$(*)$ تسمى زمرة جزئية عظمى في $(Z, *)$ (Maximal subgroup) إذا لم

يكن هناك زمرة جزئية $(K, *)$ في $(Z, *)$ بحيث أن $H \geq K \geq Z$ وهذا

يعني أنه إذا كانت $(H, *)$ زمرة جزئية عظمى في الزمرة $(Z, *)$ فإن أية

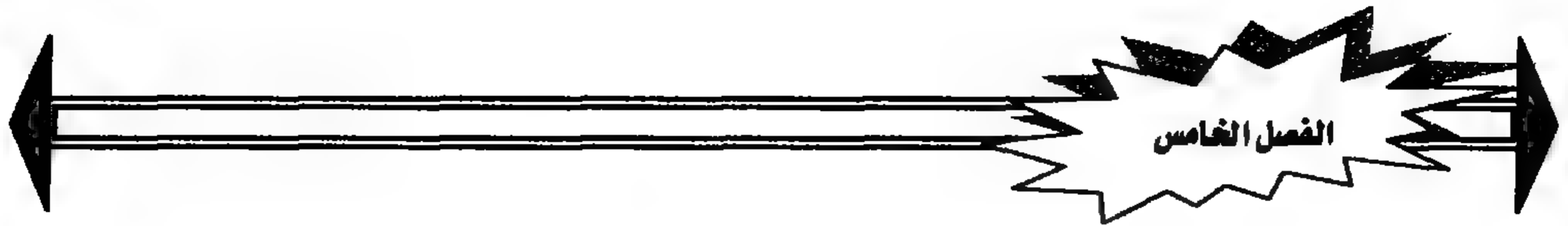
زمرة جزئية $(K, *)$ في $(Z, *)$ تحقق ما يلي: $H \geq K \geq Z \rightarrow K =$

$H \vee (K = Z)$

مثال (٤): إذا كانت $Z = \{1, -1, i, -i\}$ و \circ عملية الضرب الاعتيادية

فإن (Z, \circ) زمرة كما أن (H, \circ) زمرة جزئية في (Z, \circ) حيث أن





هـ = { ١ ، ١ - } وفي الواقع أن (هـ ٠) زمرة جزئية عظمى في (ز، ٠).

مثال (٥): إذا كانت $Z = \{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ \}$ و \oplus عملية ثنائية معرفة على

ز كما يلي:

$a + b = (a + b) \pmod{o}$ لكل العناصر $a, b \in Z$ فإن (Z, \oplus)

زمرة عنصرها المحايد هو الصفر بينما نظير العنصر ١ هو ٤ ونظير العنصر ٢ هو ٣. هذه الزمرة لا تحتوي أية زمرة جزئية غير تافهة وللطالب أن يتحقق من ذلك.

(٨-١-٢) تعريف: الزمرة الأبيلية: تسمى الزمرة $(Z, *)$ زمرة أبيلية

(Abelian Group) إذا تحقق الشرط $a * b = b * a$ لكل العناصر

$a, b \in Z$.

من الواضح أنه إذا عرفنا أن $a^n = a * a * \dots * a$ (ن من المرات.

حيث ن عدد صحيح موجب فإن $a^n * b^n = (a * b)^n$ إذا وفقط إذا

$a * b = b * a$ وتسمى هذه الخاصية أي $a * b = b * a$ خاصية الإبدال

وهي ليست بالضرورة متحققة في جميع الزمر.

مثال: لتكن $Z = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ \}$ حيث أن:

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = ١$$

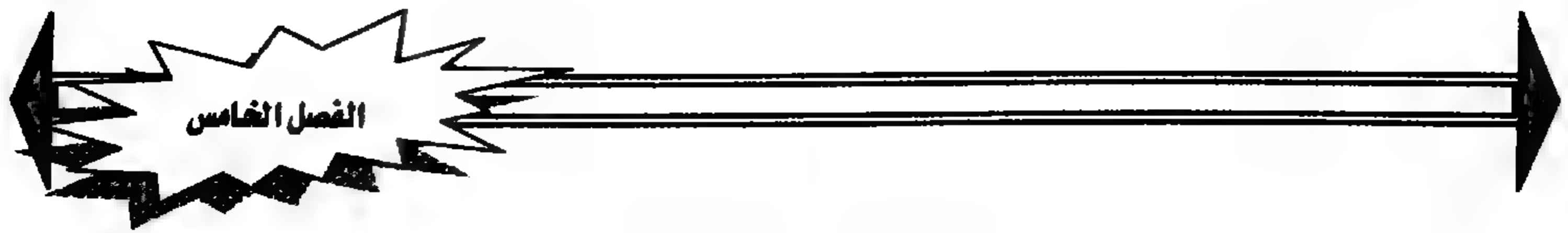
$$\begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = ٢$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = ٣ \quad \begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ١- & ١- \end{bmatrix} = ٤$$

هـ $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١- & ١- \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ١- & ١- \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ولتكن "٠" عملية الضرب الاعتيادية

على المصفوفات.





فإن (ز، ٠) تكون زمرة للطالب أن يتحقق من ذلك.

$$= \begin{bmatrix} 1 & - \\ 1 & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} = \text{ب} \quad \text{هـ} = \begin{bmatrix} 1 & - \\ 1 & - \end{bmatrix}$$

$$\text{بينما ب. د} = \begin{bmatrix} 1 & - \\ 1 & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & - \\ 1 & - \end{bmatrix} = \text{و}$$

فإن (ز، ٠) تكون زمرة للطالب أن يتحقق من ذلك. وهذه الزمرة ليست أبيلية لكون

$$\text{ج. أ} = \begin{bmatrix} 1 & - \\ 1 & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & - \\ 1 & - \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} = \text{د}$$

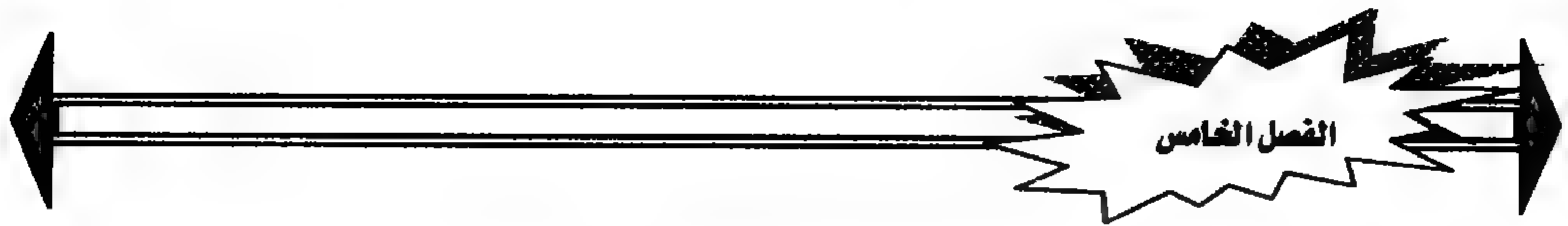
$$\text{بينما أ. ج} = \begin{bmatrix} 1 & - \\ 1 & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & - \\ 1 & - \end{bmatrix} = \text{هـ}$$

ملاحظة: وللاختصار سنكتب من الآن فصاعداً الزمرة ز بدلاً من (ز، *) كما سنكتب أب بدلاً من $\text{أ} * \text{ب}$ إلا إذا كانت هناك ضرورة لكتابتها مع العملية *.

(٩-١-٢): تعريف: إذا كانت هـ مجموعة جزئية في الزمرة ز فإن أصغر زمرة جزئية في ز (من حيث الرتبة) تحتوي على هـ. تمثل بالرمز $\langle \text{هـ} \rangle$ وتسمى الزمرة الجزئية في المتولدة بالمجموعة الجزئية هـ كما نقول أن عناصر هـ تولد الزمرة الجزئية $\langle \text{هـ} \rangle$.

في المثال أعلاه إذا أخذنا هـ = {أ، ج} فإن $\langle \text{هـ} \rangle = \langle \text{أ، ج} \rangle = \text{ز}$ لكون $\text{ج}^2 = \text{أ}$ $\text{ج} = \text{د}$ $\text{أ} = \text{ب}$ $\text{ج} = \text{هـ}$ $\text{أ} = \text{ب}$ $\text{هـ} = \text{ب}$ أي أن الزمرة ز يمكن توليدها من العناصر ج، أ.





(٢-١-١٠): تعريف: الزمرة الدائرية (Cyclic Group):

تسمى الزمرة Z زمرة دائرية إذا وجد عنصر مثل a في Z بحيث أن $\langle a \rangle = Z$
 إذا كانت $n = |\langle a \rangle|$ فإننا نرمز للزمرة الدائرية بالرمز C_n حيث أن $\langle a \rangle = C_n$.

فالزمرة في المثال (٣)، زمرة دائرية لكون C_3 ، $\langle i \rangle = Z$ حيث أن $i^3 = 1$
 $1 = i^3 \quad 1 = i^{-3}$

(٢-١-١١) تعريف: رتبة العنصر a في الزمرة Z هي رتبة الزمرة الدائرية $\langle a \rangle$.

(٢-١-١٢) مبرهنة إذا كانت Z زمرة فإن $a^i = a^{-i} = 1$ حيث أن i هو العنصر المحايد في Z و a أي عنصر في Z .

البرهان: بما أن a زمرة إذاً يوجد عنصر $a^{-1} \in Z$ إذاً $a^i = a^{-i} = 1$
 $a^i = a^{-i} = 1 \quad a^{-i} = a^i = 1 \quad a^{-i} = a^i = 1$

تعريف (٢-١-١٣): إذا كانت $(Z, *)$ و (H, \circ) زمرتين فإن التشاكل الزمري (أو التشاكل) هو الدالة $\phi: Z \rightarrow H$ بحيث أن

$$\phi(a * b) = \phi(a) \circ \phi(b) \quad \forall (a, b) \text{ لكل العناصر } a, b \in Z.$$

إذا كانت دالة التشاكل متباينة (١-١) وشاملة (onto) فإن التشاكل يسمى تشاكلاً تقابلياً، والزمرتان Z و H تكونان متشاكلتين تقابلياً إذا وجد تشاكل تقابلي.

$\phi: Z \rightarrow H$ ويعبر عن هذه العلاقة بالرمز $Z \cong H$.



وهذا ينتج

الآن نفرض أن $\mathbf{b}^{-1} \in \text{ج فیتج ج اب}^{-1} = \text{ج} \leftarrow \text{ج} = \mathbf{a} = \text{ج}$

• ≠ ∪

مجموعتين مشاركتين في Z حيث أن $\mu, \beta \in Z$ فإنه إما أن تكون $J = \beta = J$

$$\Phi = \text{اوجہ} \cap \text{جب} =$$

لیکن $s \in J \cap M$ جب إذاً $(s \in J \cap M) \wedge (s \in J \cap M)$.

لذا $e = 1 \leftarrow p = 1 \leftarrow e = 1 \leftarrow r \in \text{جـ وحسب (15-1-2)} \text{ ينتج}$

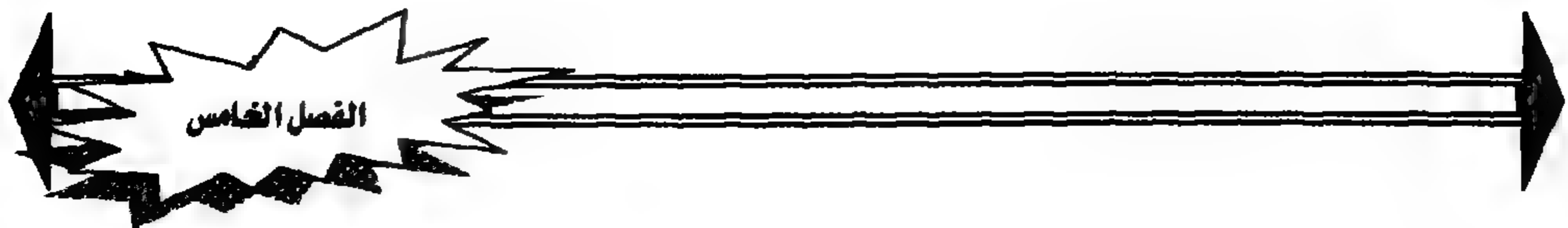
جـ = جـ بـ.

وهذه العلاقة تكون كالآتي:

پیرھن ذلک۔

المجموعات النملي (أو اليسرى) في ز يسمي دليل جـ في ز ويرمز له بالرمز

[ز : ج] .



(٢-١-١٨) مبرهنة: إذا كانت ج زمرة جزئية في ز فإن عدد المجموعات

المشاركة اليمنى في ز يساوي عدد المجموعات المشاركة اليسرى في ز.

البرهان: إذا كانت ي مجموعة المجموعات المشاركة اليمنى في ز وكانت س

مجموع المجموعات المشاركة اليسرى في ز فإن الدالة $\psi: y \rightarrow sy$ بحيث

أن $\psi: y \rightarrow sy$ ج متباينة وشاملة وتترك برهان ذلك لطالب.

(٢-١-١٩) مبرهنة: إذا كانت ك، ه زمرتين جزئيتين في ز فإن $ه ك = ك ه$ زمرة

جزئية في ز إذا وفقط إذا $ه ك = ك ه$.

البرهان:

نفرض أن $ه ك = ك ه$ ليكن س، $ص \in ه ك$ ، إذا توجد عناصر $ه_١،$

$ه_٢ \in ه$ و $ك_١، ك_٢ \in ك$ بحيث أن $ص = ه_٢ ك_٢ = س = ه_١ ك_١$ لذا يكون س

$ص = ه_١ ك_١ ه_٢ ك_٢$ بما أن $ك_١ ه_٢ \in ك ه = ه ك$ لذا يوجد عنصران $ك_٣ \in ك$ ،

$ه_٣ \in ه$ بحيث أن $ك_١ ه_٢ = ه_٣ ك_٣$ لذا

$س = ص = (ه_٣ ه_١) (ك_٣ ك_٢) \in ه ك$

إن قانون التجميع يتحقق فوراً لكون عناصر ك وه هي عناصر في ز

كذلك $س^{-١} = (ه_١ ك_١)^{-١} = ك_١^{-١} ه_١^{-١} \in ك ه = ه ك$ وأخيراً فإن س

$س^{-١} \in ه ك \leftarrow ١ \in ه ك$

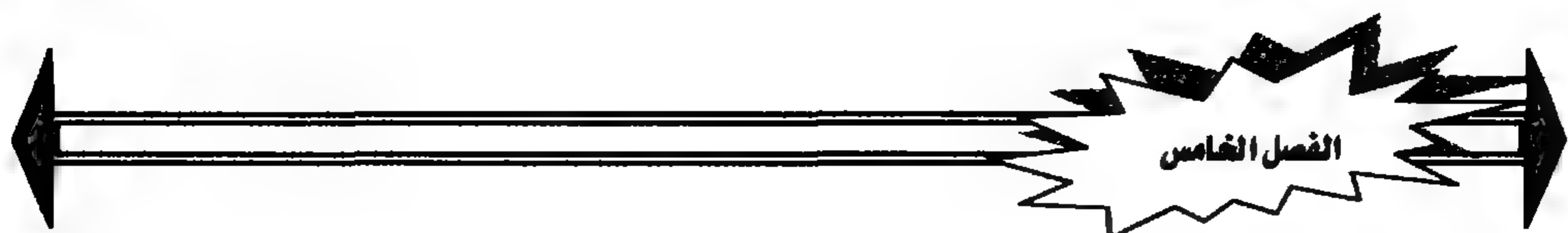
الآن نفرض أن $ه ك$ زمرة.

لتكن س $\in ه ك$ ، إذا س $\in ه ك$ ، هذا يعني أن هناك $ك \in ك$ ، $ه \in ه$

بحيث أن س $\in ه ك$ ولكن س $\in ه ك = ه ك$ $\leftarrow س = (ه ك)^{-١} = ك^{-١} ه^{-١} \in ه ك$

ك ه.





إذا $s \ni k$ هـ

نفترض الآن أن $s \ni k$ هـ إذا يوجد عناصر $k \ni k$ ، هـ \ni هـ بحيث
 $s = k$ هـ وبما أن $s = k$ هـ $\leftarrow s = s^{-1} = (k \text{ هـ})^{-1} = \text{هـ}^{-1} k^{-1} \in \text{هـ}^{-1} k$
 فإن $s^{-1} \ni \text{هـ} k$ ولكن هـ k زمرة إذا $s \ni \text{هـ} k$.

(٢٠-١-٢) مبرهنة تمهيدية:

إذا كانت ج زمرة جزئية في ز فإن $|ج| = |ج|$ حيث أن $|ج|$ يمثل عدد
 عناصر المجموعة جـ

البرهان: نعرف الدالة بين جـ جـ كما يلي جـ \leftarrow جـ هذه الدالة
 متباينة وشاملة ونترك برهانها للطالب.

(٢١-١-٢) مبرهنة لاكرنج: Lagrange Theorem

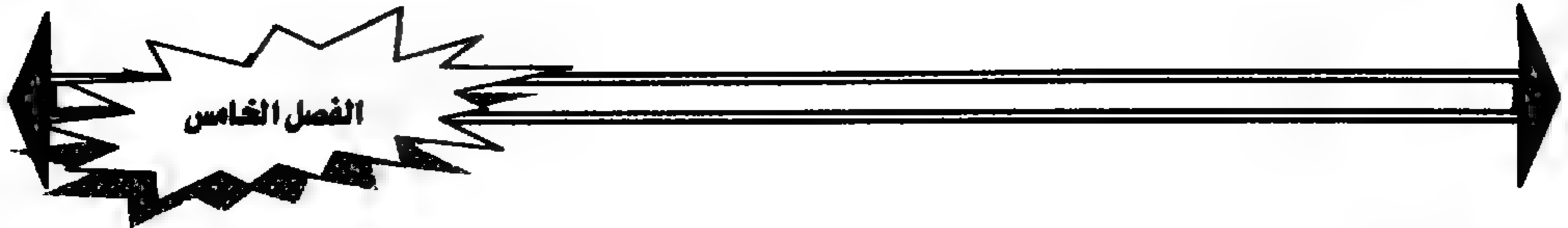
إذا كانت ج زمرة جزئية في الزمرة المنتهية ز فإن $[ز : ج] = \frac{|ز|}{|ج|}$

البرهان: بما أن دليل جـ في ز، $[ز : ج]$ يمثل عدد المجموعات المشاركة
 اليمنى (أو اليسرى) في ز وكل من هذه المجموعات تحتوي على $|ج|$ من
 العناصر.

إذا $|ز| = |ج| [ز : ج] \neq 0$

(٢٢-١-٢) نتيجة: إن كانت $|ز| = 0$ ، حيث يمثل و عدداً أولياً فإن ز زمرة
 دائرية.





البرهان: بما أن رتبة الزمرة الجزئية تقسم رتبة الزمرة Z وبما أن رتبة Z عدد أولي، إذاً تكون الزمرة الجزئية في Z هي التافهة فقط أي Z ، \Rightarrow اختر $P \in Z$ بحيث أن $P \neq 1$ إذاً $Z = \langle P \rangle$.

(٢-١-٢٣) نتيجة: إذا كانت زمرة منتهية و $P \in Z$ فإن $\langle P \rangle \trianglelefteq Z$

مثال: في المثال ٤ في هذا الفصل حيث تمثل H زمرة جزئية في Z نلاحظ أن $|Z| = 4$ ، $|H| = \frac{2}{4} = 1$ من رتب العناصر $1, i, -1, -i$ هي على الترتيب $1, 2, 3, 4$ ، $1, 2, 3, 4$ لكونها أصغر الأعداد الطبيعية التي تحقق $1 = 1^1, 1 = 1^2, 1 = 1^3, 1 = 1^4$ (i) $1 = 1^4, 1 = 1^3, 1 = 1^2, 1 = 1^1$

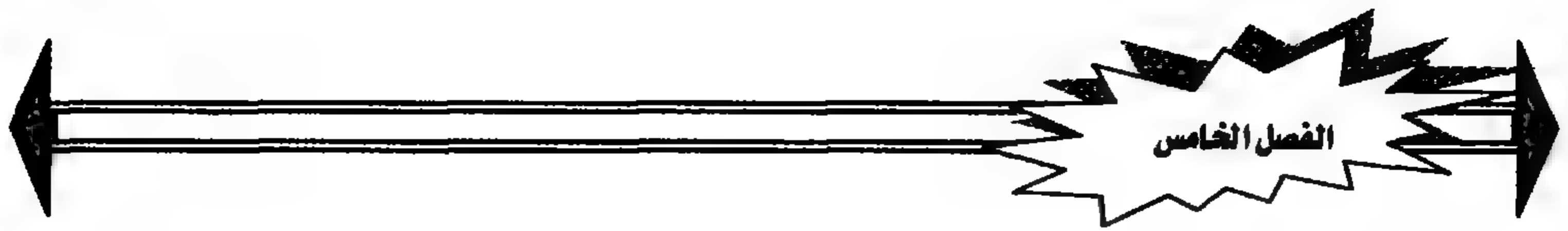
كل من العنصرين $i, -i$ يولد زمرة دائرية رتبتهما 4 والعنصر -1 يولد زمرة دائرية رتبتهما 2 .

(٢-١-٢٤) تعريف: الزمرة الجزئية S في الزمرة Z تسمى زمرة جزئية سوية (Normal Subgroup) إذا كان $zsz^{-1} \in S$ لكل $s \in S, z \in Z$ من نعبّر عن ذلك بالرمز $S \leq Z$ ويسمى العنصر $z^{-1}sz$ مرافق العنصر s في Z . إذا كانت $S \leq Z$ فإن الزمرة الجزئية السوية يمكن تعريفها كما يلي:

S زمرة جزئية سوية في Z إذا وفقط إذا $zsz^{-1} \in S$ لكل العنصر $s \in S, z \in Z$.

(٢-١-٢٥) مبرهنة تمهيدية: الزمرة الجزئية S في الزمرة Z تكون سوية إذا وفقط إذا: $S = \langle zsz^{-1} \mid s \in S, z \in Z \rangle$ لكل العنصر $s \in S, z \in Z$





البرهان: بما أن $E \subseteq S^{-1} = S \leftarrow E \subseteq S^{-1} \supseteq S$ لكل العناصر $E \in Z$.

فإن $S \supseteq Z$ (حسب التعريف)

الآن نفرض أن S زمرة جزئية سوية في Z هذا يعني أن $E \subseteq S^{-1} \supseteq S$ لكل العناصر $E \in Z$

$$\begin{aligned} \text{بما أن } E^{-1} \subseteq S \Rightarrow E^{-1} \subseteq S \leftarrow (E^{-1})^{-1} \subseteq S \leftarrow E \subseteq S \supseteq S \text{ فإن} \\ S = E \leftarrow (E^{-1} \subseteq S) \leftarrow E \supseteq S \leftarrow E \subseteq S \leftarrow E^{-1} \subseteq S \leftarrow S = \\ E \subseteq S \leftarrow E^{-1} \end{aligned}$$

هذه البرهنة تعني أن مرافق أي عنصر من عناصر الزمرة الجزئية السوية S في Z يكون موجوداً في S أيضاً. أي أن عناصر المجموعة S هي نفس عناصر المجموعة $E \subseteq S^{-1}$ ولكن هذا يعني أن $E \subseteq S^{-1} = N$ لكل العناصر $N \in S, E \in Z$

إن العبارة $E \subseteq S^{-1} = S$ لكل العناصر $E \in Z$ مكافئة للعبارة $E \subseteq S$ لكل العناصر $E \in Z$

مثال ٩: لتكن $Z = \{i, j, k, l, m, n, o, p, q, r\}$ حيث أن

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = i \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = j \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = k$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = l \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = m \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = n$$

إذا كانت عملية الجمع لعناصر المصفوفات معرفة على النحو الآتي:

$$1 = 1 + 1 = 1 + 1$$

$$) =) + \bullet = \bullet +)$$

فإن (ز، X) تكون زمرة حيث أن X تمثل عملية الضرب للمصفوفات رتبة
 ز هي ٦.

إذا كانت $h^* = [i, d, h]$ فإن h^* زمرة جزئية سوية في Z ، وللطالب أن يتحقق من ذلك.

كذلك نلاحظ أن $\mathbf{d} = \mathbf{h} \mathbf{h}^{-1} = \mathbf{h} \mathbf{d} \mathbf{h}^{-1} \neq \mathbf{h}$ هذا يعني أن $\mathbf{h} \neq \mathbf{h}^{-1}$
وكذلك $\mathbf{h} > \mathbf{h}^{-1} \neq \mathbf{d}$ ولكن $\mathbf{h} \mathbf{h}^{-1} = \mathbf{h} \mathbf{d} \mathbf{h}^{-1} = \mathbf{d}$ أو من ناحية أخرى $\mathbf{h} \mathbf{h}^{-1} = \mathbf{d}$
 $\mathbf{h} \mathbf{h}^{-1} = \mathbf{d} = \{\mathbf{h}, \mathbf{h}^{-1}, \mathbf{d}\} = \{\mathbf{h}, \mathbf{d}, \mathbf{h}^{-1}\} = \mathbf{h} \mathbf{h}^{-1} \mathbf{d} = \mathbf{d}$

(٢٦-١-٢) مبرهنة: الزمرة الجزئية S في الزمرة Z تكون سوية إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب مجموعتين مشاركتين S في Z مجموعة مشاركة S في Z .

البرهان: نفرض أن s زمرة جزئية سوية في Z ، هذا يعني أن $e s = s e$
لكل العناصر $e \in Z$. إذا

س م بس = س (ا س) ب = س (س ا) ب = س س ا ب = س ا ب = س ا ب لکل عناصر ع ز.

الان نفرض ان $s_1 s_2 = s_3 = s_4$ لكل عناصر $i \in B$:

[illegible]

هذا يعني أن M^{-1} نظير M وهو موجود في Z / M إذا Z/M زمرة.

ومن الواضح طبعاً أنه عندما تكون Z زمرة منتهية فإن $Z/M = [Z:M]$

$$أي أن |Z/M| = \frac{|Z|}{|M|}$$

(٢-١-٢٩) نتيجة: إذا كانت M زمرة جزئية في الزمرة Z وكان $[Z:M] = 2$ فإن M زمرة جزئية سوية في Z .

البرهان: بما أن $[Z:M] = 2$ إذا توجد مجموعتان مشاركتان يمينى إلى M في Z طبعاً M هي إحدى هاتين المجموعتين.

نفرض أن $M \in Z$ ، إذا كان $M \in M$ فإن $M = M$ أما إذا كان $M \notin M$ فإن

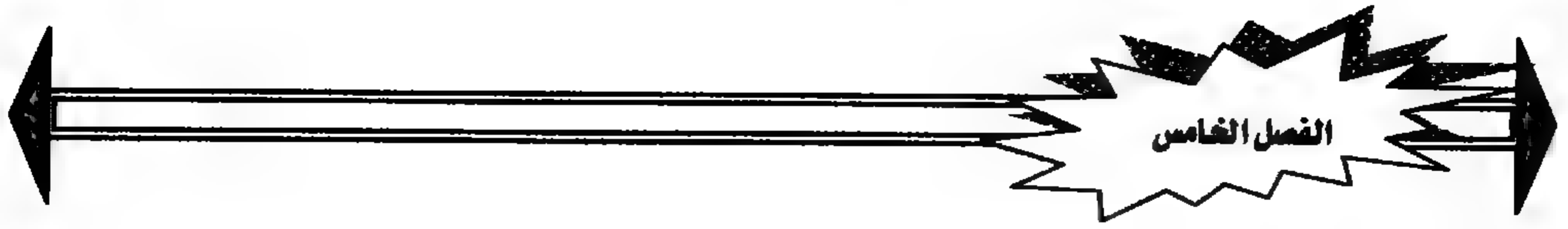
$M \in (Z - M) \iff (M \cap M = \emptyset) \wedge (M \cap M = M) \iff \Phi = (M \cap M) \iff \Phi = \emptyset$ بما أنه يوجد في Z اثنتان فقط من المجموعات المشاركة اليمينية إلى M وإحداهما M فإن $M = M$ وهذا يعني أن $M \supseteq Z \neq \emptyset$

(٢-١-٣٠) تعريف: الزمرة البسيطة (Simple Group):

الزمرة Z تسمى زمرة بسيطة إذا كانت الزمر الجزئية السوية في Z هي التافهة فقط، أي لا يوجد زمرة جزئية H بحيث $I \subsetneq H \subsetneq Z$

(٢-١-٣١) تعريف: الممرکز:

ليكن M عنصراً في الزمرة Z فإن مجموعة عناصر Z التي تحقق صفة الإبدال مع M تسمى ممرکز M في Z ويرمز له بالرمز $Z(M)$ أي أن $Z(M) = \{x \in Z : xM = Mx\}$ وبالإمكان توسيع فكرة الممرکز لأكثر من عنصر واحد كما يلي:



(٢-١-٣٢) تعريف:

لتكن \mathcal{S} مجموعة جزئية غير خالية في الزمرة Z ، مركز \mathcal{S} في Z يرمز له بالرمز $\mathcal{M}_Z(\mathcal{S})$ وهي مجموعة عناصر Z التي تحقق صفة التبادل مع جميع عناصر \mathcal{S} أي أن

$$\mathcal{M}_Z(\mathcal{S}) = \{z \in Z : z\mathcal{S} = \mathcal{S}z : \forall \mathcal{S} \in \mathcal{S}\}$$

(٢-١-٣٣) تعريف: المسوي:

لتكن \mathcal{S} مجموعة جزئية غير خالية في Z ، مسوي \mathcal{S} في Z يرمز له $\mathcal{S}_Z(\mathcal{S})$ وهو مجموعة عناصر Z التي تحقق العلاقة $\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{S}$ أي أن

$$\mathcal{S}_Z(\mathcal{S}) = \{z \in Z : z\mathcal{S} = \mathcal{S}z\} \text{ ومن الواضح أن } \mathcal{M}_Z(\mathcal{S}) \geq \mathcal{S}_Z(\mathcal{S})$$

(٢-١-٣٤) تعريف: مركز الزمرة (Center):

لتكن Z زمرة يرمز لمركز الزمرة Z بالرمز Z ، وهو مجموعة عناصر Z التي تحقق صفة الإبدال مع جميع عناصر Z أي أن

$$Z = \{z \in Z : z\mathcal{S} = \mathcal{S}z : \forall \mathcal{S} \in Z\}.$$

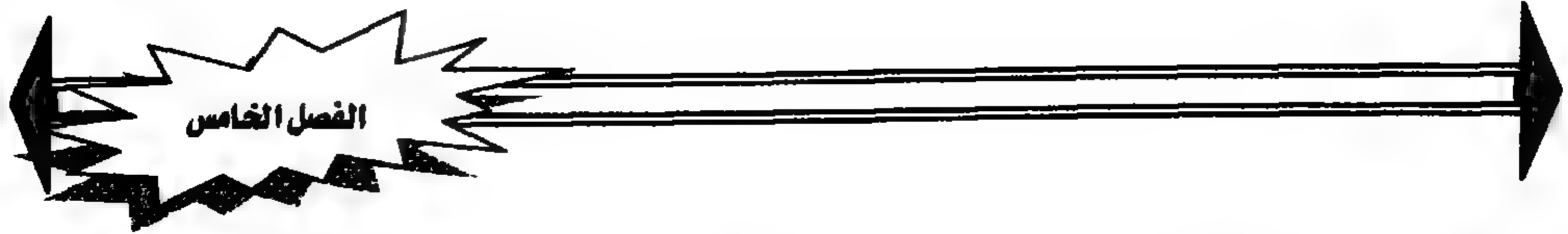
(٢-١-٣٥) تعريف: الجداء المباشر (The Direct Product)

لتكن H, K زميرتين منتهيتين. الجداء المباشر للزميرتين H, K هو

$$Z = H \times K = \{(h, k) : h \in H, k \in K\} \text{ إذا عرفنا } * \text{ على } Z$$

بالشكل





(س، ص) * (س_١، ص_١) = (س * س_١، ص * ص_١)، (س، ص)
 (س_١، ص_١) = (س س_١، ص ص_١) فإن (ز، *) تكون زمرة عنصرها المحايد
 (١ هـ ك) حيث أن ك، ١ هـ وهما العنصران المحايد للزمرتين هـ، ك على
 الترتيب.

العنصر النظير للعنصر (س، ص) هو (س، ص)^{-١} = (س^{-١}، ص^{-١})
 كما أن قانون التجميع يتحقق لكون كل من هـ، ك زمرة.

رتبة ز هي حاصل ضرب رتبة هـ في رتبة ك أي أن | ز | = | هـ × ك |
 | هـ | | ك |

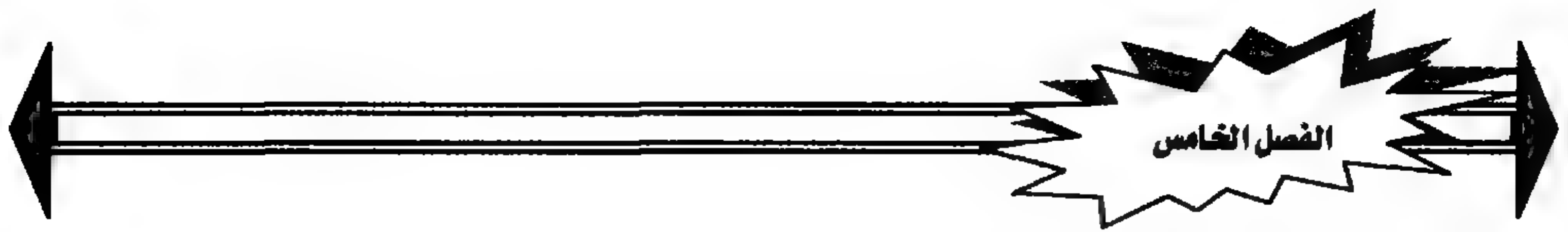
بالإمكان تعميم الجداء المباشر لأكثر من زمرتين حيث تكون ز = هـ_١ × هـ_٢ × هـ_ر =

{ (س_١، ص_١، س_٢، س_ر) : س_١ ∈ هـ_١ حيث أن ١ = ١، ٢، ر }

كذلك | ز | = | هـ_١ | | هـ_٢ | | هـ_ر | وتكون في بعض الأحيان
 الزمرة ز متشاكلة تقابلياً مع الجداء المباشر لزمرتين جزئيتين ك، هـ في ز، نعبر عن
 ذلك بالرمز ز ≈ هـ × ك هذه الحالة تكون عندما تتوفر الشروط التالية:

(أ) صفة الإبدال تحقق بين عناصر هـ وعناصر ك، أي أن س ص = ص س
 لكل عناصر س ∈ هـ ولكل عناصر ص ∈ ك.

(ب) لكل العناصر س * ز يوجد عنصر س ∈ هـ وعنصر ص ∈ ك بحيث أن
 س * س ص هذا يعني باختصار أن ز = هـ ك.



(ج) العنصر المحايد هو العنصر الوحيد المشترك بين الزمرتين ك، هـ أي ان $هـ \cap ك = \{1\}$.

ويمكن استبدال الشرطين (ب) و(ج) بشرط واحد مكافئ لهما هو أن كل عنصر $س^*$ $\ni ز$ يمكن تمثيله بشكل وحيد كحاصل ضرب العنصر في هـ وعنصر في ك، أي أنه إذا كان $س^* \ni ز$ فيوجد عنصر $س \in هـ$ وعنصر $ص \in ك$ بحيث أن $س^* = س ص$ وأن هذا التمثيل وحيد.

يمكن التحقق من ذلك التمثيل وبسهولة وكما يلي:

نفرض أن الشرطين (ب) و(ج) يتحققان. نفرض أن $س^* = س ص = س_1 ص_1$ إذا

$$س_1^{-1} س = ص_1^{-1} ص_1 = 1 \text{ وهذا ينتج فوراً}$$

$$ص_1 = 1 \text{ و } س_1 = س.$$

الآن نفرض أن كل عنصر $س^*$ في ز هناك عنصر $س \in هـ$ وعنصر $ص \in ك$ بحيث أن

$$س^* = س ص \text{ وأن هذا التمثيل وحيد.}$$

الشرط (ب) متحقق فوراً.

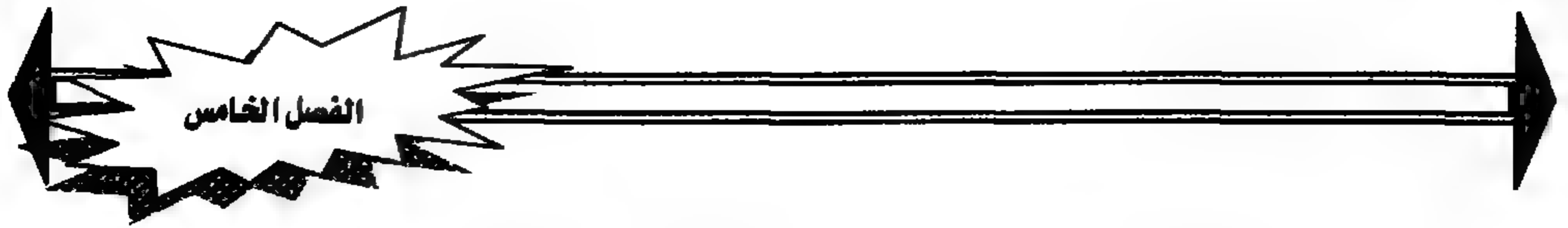
نفرض أن $هـ \cap ك \ni ز$ فإن $ز \in هـ$ و $ز \in ك$ وبالتالي فإن $ع = ا ع$ حيث أن $ا \in هـ$ و $ع \in ك$.

كذلك $ا ع = ع$ حيث أن $ا \in ك$ ، $ع \in هـ$ ولكن ع له تمثيل واحد (بالفرض).

إذاً $ا ع = 1$ واستناداً إلى حالة التكافؤ أعلاه فإن الدالة $و (س^*) = و (س)$

(ص) = (س، ص) تحقق شروط التشاكل التقابلي، وهذا يعني أن $ز \approx هـ \times ك$.





بنفس الطريقة يمكن تعميم الحالة الآنفة الذكر لأكثر من زميرتين بحيث تكون

$z \simeq h_1 \times h_2 \times \dots \times h_r$ حيث أن h_1, h_2, \dots, h_r زمير جزئية في z عندما (أ) عناصر كل زميرتين h_i, h_j ، تحقق صفة الإبدال.

(ب) لكل العناصر $s \in z$ توجد عناصر $s_1 \in h_1, s_2 \in h_2, \dots, s_r \in h_r$ بحيث أن $s = s_1 \times s_2 \times \dots \times s_r$

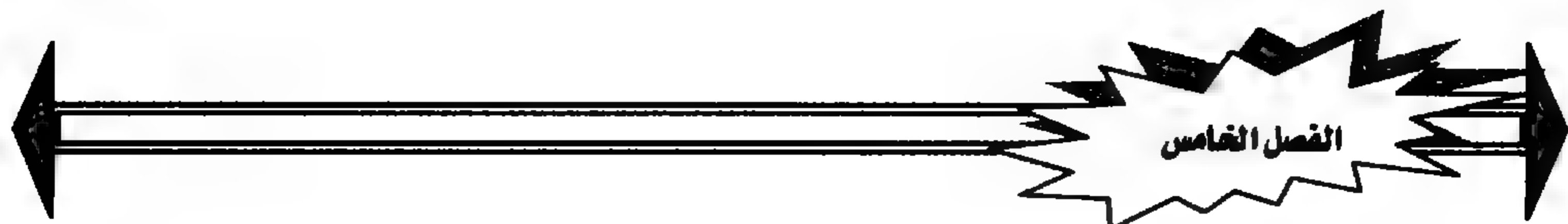
(ج) $h_1 \cap h_2 \cap \dots \cap h_r = \{1\}$

مثال ١٠: لتكن $z = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ ، عملية ثنائية معرفة على z كما يلي: $a \otimes b = (a \times b) \pmod{15}$ لكل العناصر $a, b \in z$

وفي ومن الواضح أن z تكون زمرة، كما أن $zC = \{1, 11\}$ ، $zC = \{2, 4, 7, 8, 13, 14\}$ زمرة جزئية في z ، بما أن z زمرة أبيلية فإن الشرط (أ) يتحقق فوراً. بما أن $zC \cap zC = \{1, 11, 2, 4, 7, 8, 13, 14\} = z$ إذن يتحقق الشرط (ب) أيضاً.

بما أن $zC \cap zC = \{1\}$ فإن الشرط (ج) يتحقق وبالتالي فإن $z \simeq zC \times zC$.

(٣٦-١-٢) مبرهنة: إذا كانت z زمرة منتهية ورتبة كل عنصر فيها ٢. أي أن $(s)^2 = 1$ لكل العناصر $s \in z$ فإن z تتشاكل تقابلياً مع الزمرة الأبيلية من النمط



طبيعياً. $\underbrace{U \times U \times \dots \times U}_m$ وبذلك فإن $|Z| = |C|$ حيث تمثل m عدداً

البرهان: إذا كانت $|Z| = 2$ فإن $Z = C$ والمبرهنة صحيحة.

ولكن من s_1^1 من s_2^2 بفرض أن $|Z| < 2$ لتكن P ، $b \in Z$ عناصر
تختلف عن العنصر المحايد 1 وبالفرض $1 = b^2 = b^2$ وهذا يعني أن $1 = b^{-1}$ ، $b =$
 b^{-1}

كذلك P ، $b \in Z$ وهذا يتج حسب الفرض أيضاً. $(b^2) = 1$ إذا P
 $= (b^2) = 1^{-1} = b^{-1} = 1^{-1} = b$

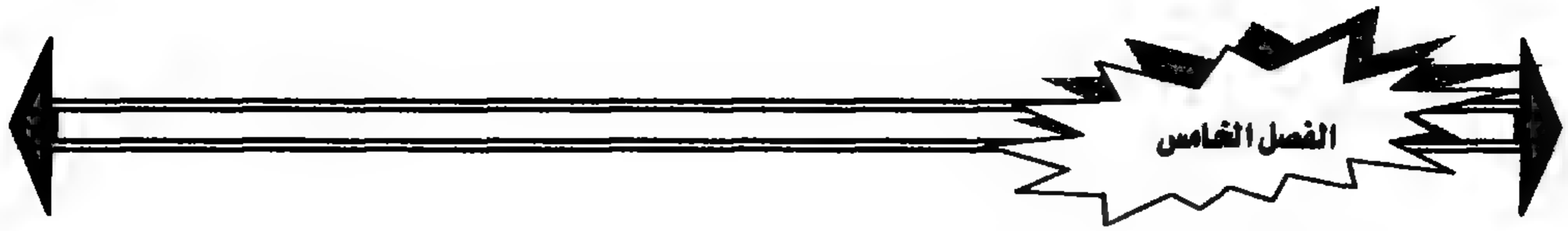
وهذا يعني أن Z زمرة أبيلية وبالتالي فإن الشرط 1) يتحقق فوراً لتكن
 $Z = \langle s_1, s_2, \dots, s_r \rangle$ حيث أن s_1, s_2, \dots, s_r هي العناصر المولدة
للزمرة Z والتي لا يمكن اختزالها إلى عدد أقل. أي لا يمكن كتابة أي من عناصرها
بدلالة العناصر الأخرى الباقية.

بما أن Z زمرة أبيلية وأن رتبة كل عنصر فيها 2، وإذا كانت $s \in Z^*$ فإن

$s^* = s_1^1 s_2^2 \dots s_r^r$ حيث أن i تساوي صفر أو 1 لكل قيم
 $i = 1, 2, \dots, r$ نفرض أن هناك تمثيل آخر إلى s^* أي أن $s^* = s_1^{n_1} s_2^{n_2}$
 $\dots s_r^{n_r}$ حيث أن n_i تساوي صفر أو 1 لكل قيم $i = 1, 2, \dots, r$.

إذاً $(s^*)^2 = s^* s^* = 1 \leftarrow (s_1^1 s_2^2 \dots s_r^r) (s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_r^{n_r}) = s_1^{1+n_1} s_2^{2+n_2} \dots s_r^{r+n_r}$
 $\dots s_r^{n_r} = 1 \leftarrow s_1^1 s_2^2 \dots s_r^r = 1$ حيث أن $l = i + m = n + i$
لكل قيم $i = 1, 2, \dots, r$ كما أن l تساوي صفر أو 1.





أما إذا كانت Z لا تحتوي على عنصر رتبته ٤ فإن هذا يعني أن جميع عناصر Z باستثناء العنصر المحايد طبعاً، ذات الرتبة ٢. وهذا ينتج حسب المبرهن (٢-٣٦) بأن $Z \cong C_2 \times C_2$ وأن عناصر Z هي ١، a ، b ، $ab = ba$.

إذاً يوجد نمطان فقط للزمر ذات الرتبة ٤ وهي C_4 أو $C_2 \times C_2$ الآن نناقش الزمر ذات الرتبة ٦. نفرض أن $|Z| = 6$ ، إذاً وجد عنصر في Z رتبته ٦ أي أن هناك $a \in Z$ بحيث أن $a^6 = 1$ فإن $Z = \langle a \rangle = C_6$ ليكون رتبة Z هي ٦ أيضاً.

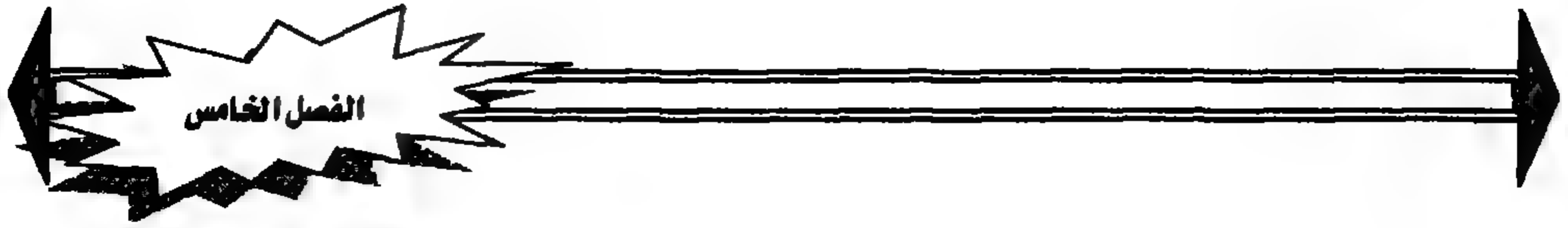
إذا لم يكن هناك عنصر في Z رتبته ٦ فإن احتمالات رتبة أي عنصر مثل a في Z ويختلف عن العنصر المحايد إما أن تكون ٢ أو ٣ لأن $|\langle a \rangle| \mid |Z| = 6$ لكل العناصر $a \in Z$.

بما أن $|Z| = 6$ لأي عدد طبيعي n . فيوجد في الأقل عنصر واحد $a \in Z$ ذو رتبة ٣. وهذا يعني أن هناك ٣ عناصر متميزة في Z هي: $1, a, a^2$ ، بما أن رتبة $\langle a \rangle$ هي ٣ بينما رتبة Z هي ٦. فإن $\langle a \rangle < Z$ هذا يعني أن هناك عنصراً آخر $b \in Z$ يختلف عن العناصر الثلاثة الأخرى. لذا Z يحتوي على العناصر الستة الآتية:

$1, a, a^2, b, ab, a^2b$ وهي متميزة أي أن $Z = \{1, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ ، و $\{a^2b\}$ (للتألب أن يتحقق من تمايز عناصر Z) لكي تكون المجموعة Z مع العملية الثنائية المعرفة عليها. زمرة يجب أن تكون Z مغلقة بالنسبة للعملية الثنائية.

نبدأ أولاً بالعنصر a الذي يجب أن يكون أحد العناصر الستة الأنفة الذكر بما أن:





$$1 = 1 \leftarrow 1 = 1 \leftarrow 1 = 1 \leftarrow 1 = 1$$

فإن هذه الاحتمالات غير واردة لأن و يختلف عن 1، 1، 1.

بقيت هناك ثلاثة احتمالات إلى و وهي إما 1 = 1 أو 1 = 1 أو 1 = 1

إذا كان 1 = 1 فإن هذا ينتج 1 = 1. ولكن 1 ≠ 1، 1 ≠ 1 حيث أن 1، 1، 1 هي من العناصر الستة المتميزة.

إذا 1 ≠ 1، 1 ≠ 1، وهذا يعني أن رتبة ولا تساوي 2 كما أنها لا تساوي 3 وهذا يناقض ما كنا قد افترضناه أولاً.

وبنفس الطريقة إذا كان 1 = 1 فإن هذا ينتج 1 = 1 وبالتالي فإن رتبة ولا تساوي 2 كما أنها لا تساوي 3 لنفس السبب في الحالة السابقة. وهذا يناقض ما كنا افترضناه أيضاً إذاً:

والآن نناقش العنصر 1 والذي يجب أن يكون أحد العناصر الستة المتميزة

بما أن

$$1 = 1 \leftarrow 1 = 1 \leftarrow 1 = 1$$

$$1 = 1 \leftarrow 1 = 1$$

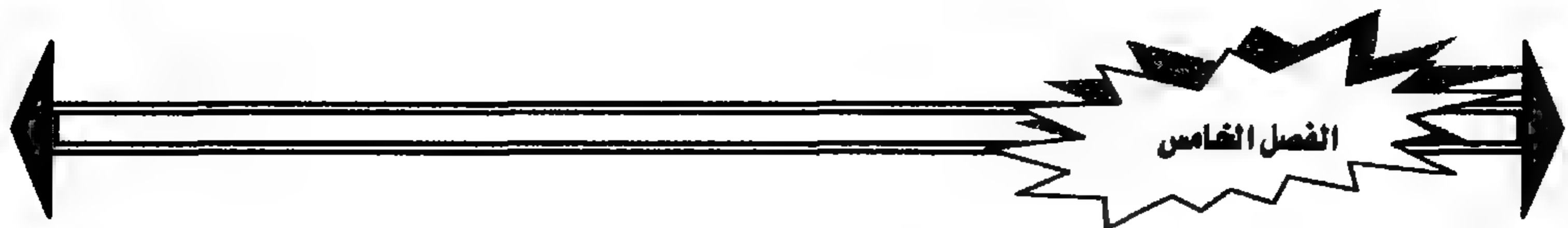
$$1 = 1 \leftarrow 1 = 1$$

$$1 = 1 \leftarrow 1 = 1$$

فإن هذه الاحتمالات غير واردة لأن و تختلف عن 1، 1، 1 كما أن

1 ≠ 1 بقي احتمالان إلى 1 وهما 1 = 1 أو 1 = 1 إذا كان 1 = 1 فإن:





$(\rho) = \rho = \rho^2 = \rho^3 = \rho^4 = \dots = \rho^{p-1} = 1$ وكذلك $\rho \neq \rho^2 \neq \rho^3 \neq \rho^4 \neq \dots \neq \rho^{p-1} \neq 1$ هذا يعني
 أن رتبة ρ لا تساوي 2 ولا تساوي 3. وهذا يناقض ما كنا قد افترضناه إذاً
 $\rho = \rho^2 = \rho^3 = \rho^4 = \dots = \rho^{p-1} = 1$ ومنها نستنتج أيضاً أن $(\rho) = p$ أو $\rho = \rho^2 = \rho^3 = \rho^4 = \dots = \rho^{p-1} = 1$
 والآن لم يبق للعنصر ρ سوى احتمال واحد هو $\rho = \rho^2 = \rho^3 = \rho^4 = \dots = \rho^{p-1} = 1$ ويمكن
 التحقق من ذلك بسهولة.

$\langle \rho \rangle = \rho = \rho^2 = \rho^3 = \rho^4 = \dots = \rho^{p-1} = 1$ لذا فهناك نمطان فقط من
 الزمر ذات الرتبة 6 هي C_6 والزمرة $\langle \rho \rangle = \rho = \rho^2 = \rho^3 = \rho^4 = \dots = \rho^{p-1} = 1$

(٢٨-١-٢) تعريف: (Dihedral group):

عندما $n \geq 3$ فإن الزمرة D_n (Dihedral group) تعرف كالآتي:
 $D_n = \langle \rho, \sigma \rangle$ حيث أن $\rho^n = 1$ ، $\sigma^2 = 1$ ، $\sigma\rho = \rho^{-1}\sigma$ رتبة D_n هي
 2ن.

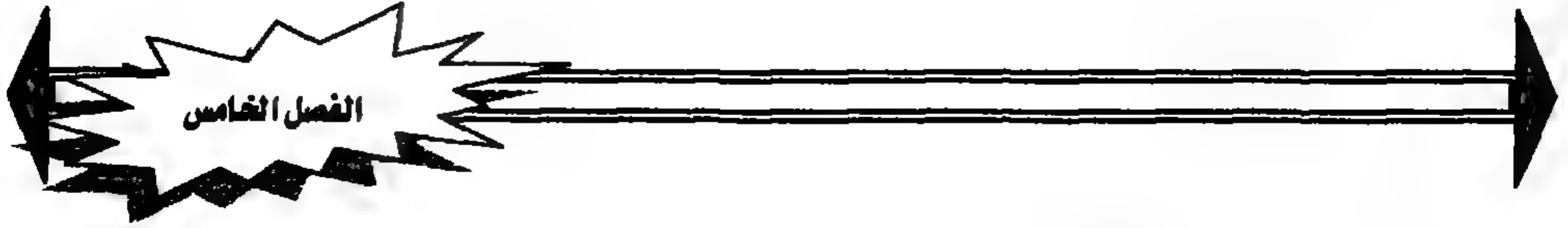
مثال ١١: الزمرة $\langle \rho \rangle = \rho = \rho^2 = \rho^3 = \rho^4 = \dots = \rho^{p-1} = 1$ هي D_3
 كما أن $|D_3| = 6$

تمارين (١-٢)

١- برهن أن المجموعات التالية تكون زمراً أبيلية غير منتهية نسبة إلى عمليات
 الضرب الاعتيادية

$$(1) \quad Z = \{ \dots, 2k, 1, 0, -1, -2, \dots \}$$





(ب) $z = \{ i + \theta \mid i \in \theta, \theta \in \theta \}$ ، حيث أن n تمثل مجموعة الأعداد النسبية.

٢- لتكن z زمرة، والعناصر $a, b, c \in z$ برهن أن

(أ) العنصر والعنصر a لهما نفس الرتبة

(ب) إذا كان $a = b$ فإن $a = b$ فإن $a = b$.

(ج) إذا كان $a = b$ وكان $(m, n) = 1$ فيوجد عنصران $a, b \in z$ بحيث أن $a = b$ ، $a = b$ ، $a = b$.

٣- لتكن $z = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ و \otimes عملية ثنائية معرفة على z كما يلي:
$$a \otimes b = (a \times b) \pmod{7}.$$

برهن أن الزمرة z دائرية. ثم جد رتبة كل عنصر فيها.

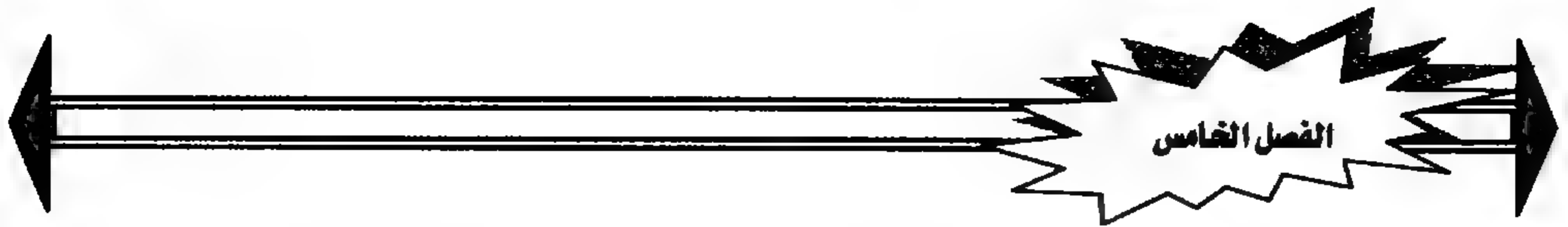
٤- برهن أن z تحتوي على عدد فردي من العناصر ذات الرتبة ٢ إذا كانت $|z| = 2n$ والرمز n يمثل عدداً طبيعياً.

٥- برهن أن المصفوفات $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

حيث أن $\omega \neq 1$ ، $\omega^2 = 1$ تكون زمرة ذات

رتبة ٦ مع عملية الضرب الاعتيادية للمصفوفات، ثم جد الزمر الجزئية وحدد أيها زمرة جزئية عظمى.





٦- جد أنماط الزمر التي رتبها ٨. ثم جد الزمر الجزئية التي رتبها ٤ في كل زمرة من الزمر أعلاه.

٧- برهن أنه إذا كانت $|Z| = m$ فإن هناك زمراً جزئية غير تافهة في الزمرة Z .

٨- برهن أن p ، و p^{-1} هما نفس الرتبة في الزمرة Z حيث أن p ، $p \in Z$.

٩- لتكن p ، b ، a عناصر في الزمرة Z ، برهن أن $(a^p)^b = a^{pb}$ ، $a^{p^2} = (a^p)^p$ حيث أن a كلاً من n ، m يمثل عدداً طبيعياً.

١٠- برهن أن المصفوفات التالية تكون زمرة نسبة إلى عملية الضرب الاعتيادية للمصفوفات ثم حدد الزمر الجزئية وبين إذا كانت عظمى أم لا.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

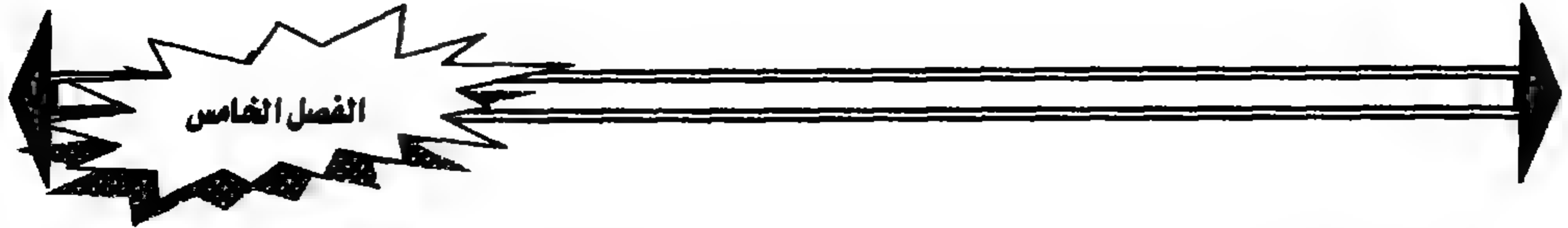
١١- برهن أن (Z, \oplus) زمرة حيث أن $Z = \{0, 1, 2, 3\}$ و \oplus معرفة على Z كما يلي:

$a \oplus b = (a + b) \pmod{4}$ ثم يبين أن هذه الزمرة ليست متشاكلة تقابلياً مع الزمرة Y التمرين ١٠.

١٢- برهن أن الزمرة Z أبيلية إذا وفقط إذا كانت الدالة $\varphi: Z \rightarrow Z$ والمعرفة بالشكل $\varphi(s) = s^{-1}$ عبارة عن تشاكل تقابلي زمري بين Z ونفسها.

١٣- إذا كانت كل من H و K زمرة جزئية في Z فبرهن أن $\langle H \cup K \rangle$ أصغر زمرة في Z وتحتوي على H و K .





١٤- إذا كانت n^+ مجموعة الأعداد النسبية الموجبة فبرهن أن (n^+, x) تتولد من العناصر $\frac{1}{n}$ حيث تمثل n عدداً أولياً.

١٥- إذا كانت G زمرة جزئية في الزمرة Z وإذا عرفنا العلاقة N على Z كما يلي:

Np إذا كان $p \in Z$ فبرهن أن N علاقة تكافؤ.

١٦- ليكن p عنصراً في الزمرة Z ، برهن أنه إذا كان $p^n = 1$ فإن رتبة p تقسم n حيث تمثل n عدداً طبيعياً.

١٧- إذا كانت Z زمرة وكانت $p \in Z$ و $q \in Z$ فبرهن أن كلا من $m(p)$ ، $m(q)$ ، $m(pq)$ زمرة جزئية في Z .

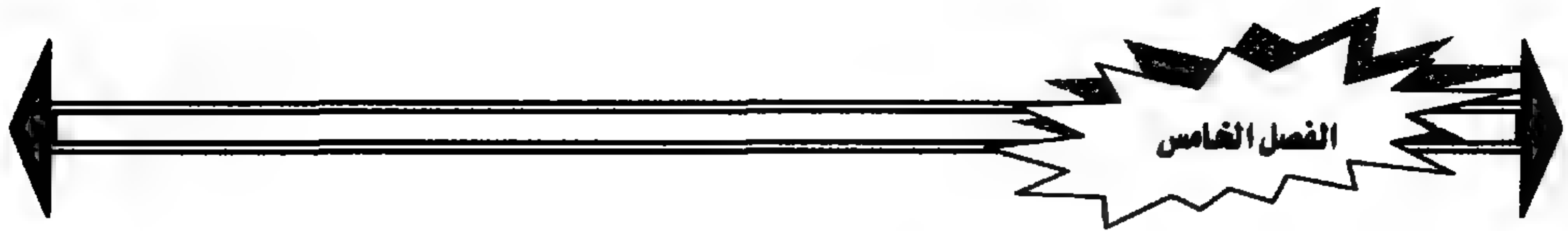
١٨- إذا كانت q زمرة جزئية في الزمرة Z وكانت $m(pq) = q$ فبرهن أن $q \leq Z$.

(٢-٢) زمرة التباديل (Permutation group)

(٢-٢-١) تعريف: التبديل (permutation)

لتكن X مجموعة منتهية غير خالية فكل دالة متباينة وشاملة من X إلى X تسمى تبديلاً على X .

نرمز لعناصر المجموعة المنتهية X بالأرقام ١، ٢، ٣، كما نمثل التبديل π على X بالرمز



$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$. حيث أن $\pi(h) = h$ صورة العنصر h

بالنسبة للتبديل π ، أي أن الصف الثاني هو الصف الأول ولكن بعد إعادة ترتيبه بواسطة التبديل π وكما يلي:

$$1 \leftarrow 1$$

$$2 \leftarrow 2$$

$$3 \leftarrow 3$$

⋮

$$n \leftarrow n$$

(ملاحظة: أ) هنا استخدمنا الرمز $\pi(i)$ بدلاً من $\pi(i)$ لملاءمته الآن ولاحقاً عند التعامل مع التباديل.

(ب) من الآن فصاعداً سنكتفي بذكر $(x \text{ مجموعة})$ بدلاً من $(x \text{ مجموعة منتهية غير خالية})$ حيث أنها ستكون كذلك خلاف هذا الفصل، ومن الواضح أن التبديل الواحد ممكن كتابته بأشكال مختلفة مثلاً:

$$\dots \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

وهكذا وبشكل عام يوجد ن! من الأشكال المتكافئة للتبديل واحد.

$$\text{ليكن } \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 1 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ تبديلاً}$$

آخر على X .

تركيب التباديل $\pi \circ \mu$ هو التبديل الذي ينتج من تطبيق التبديل π أولاً ثم μ ثانياً، أي أنه نفس مفهوم تركيب الدوال.



$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \dots n \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \dots \leftarrow \end{array} \right) = \pi \circ \rho$$

لأنه $\rho_z = z^\pi$ و $\rho_z' = z$ جز لكل قيم z حيث أن $z = 1, 2, \dots, n$.

نعرف حاصل الضرب $\rho \pi$ بأنه تركيب التباديل $\rho \circ \pi$. لذلك سنستخدم من الآن فصاعداً الرمز $\rho \pi$ للدلالة على تركيب التباديل $\rho \circ \pi$.

مثال ١٢: ليكن π_1 و π_2 تبديلان حيث أن:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \end{array} \right) = \pi_2 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \end{array} \right) = \pi_1$$

$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4$$

$$2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 1$$

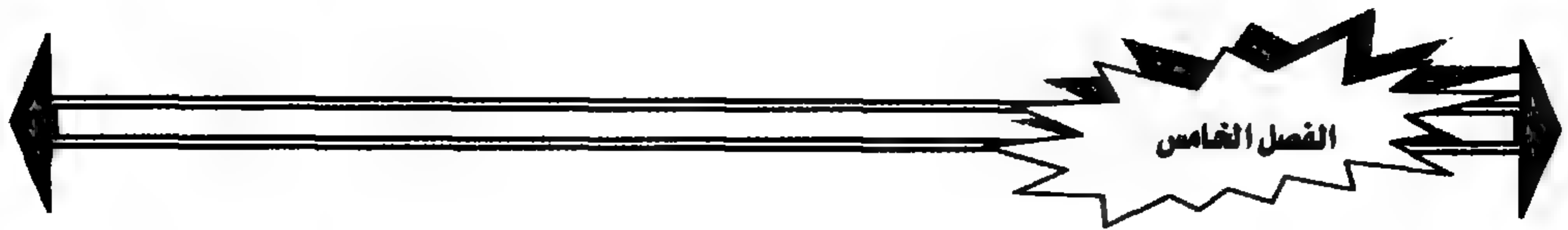
$$3 \leftarrow 4 \leftarrow 1 \leftarrow 2$$

إذاً $\pi_2 \pi_1 = \pi_1 \pi_2$ لاحظ أن $\pi_2 \pi_1 \neq \pi_1 \pi_2$ أي أن صفة الإبدال ليست متحققة.

الآن نناقش توفر شروط الزمرة \mathcal{S}_n بالنسبة للتباديل وعملية الضرب في أعلاه. التبديل.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \dots n \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \dots \leftarrow \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \dots n \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \dots \leftarrow \end{array} \right) = I$$

يمثل العنصر المحايد بالنسبة للتباديل لأن $\pi = I \pi = \pi I$ لأي تبديل π ، كما موضح أدناه بالنسبة إلى $\pi = \pi I$.



$$1 \xleftarrow{I} 1 \xleftarrow{\pi} 1p$$

$$2 \xleftarrow{\quad} 2 \xleftarrow{\quad} 2p$$

$$3 \xleftarrow{\quad} 3 \xleftarrow{\quad} 3p$$

$$| \quad | \quad |$$

$$n \xleftarrow{\quad} n \xleftarrow{\quad} np$$

كذلك التبديل $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1p & 1 \\ 2 & 2p \\ 3 & 3p \\ \vdots & \vdots \\ n & np \end{pmatrix}$ هو نظير التبديل

$$\pi \pi^{-1} = \pi^{-1} \pi = I \text{ لأن } \begin{pmatrix} 1 & 1p \\ 2 & 2p \\ 3 & 3p \\ \vdots & \vdots \\ n & np \end{pmatrix} = \pi$$

كما موضح أدناه بالنسبة إلى $I = \pi^{-1} \pi$ حيث أن

$$1 \xleftarrow{\pi^{-1}} 1p \xleftarrow{\pi} 1$$

$$2 \xleftarrow{\quad} 2p \xleftarrow{\quad} 2$$

$$| \quad | \quad |$$

$$n \xleftarrow{\quad} np \xleftarrow{\quad} n$$

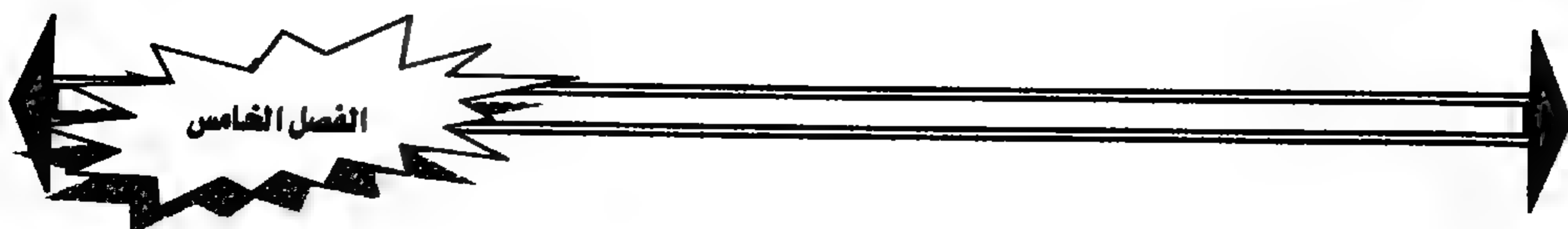
أما قانون التجميع فإنه يتحقق وبسهولة أيضاً.

(٢-٢-٢) تعريف: الزمرة المتناظرة (Symmetric group)

مجموعة التباديل على المجموعة X و $|X| = n$ مع عملية الضرب تكون

زمرة هذه الزمرة تسمى الزمرة المتناظرة على X ويرمز لها بالرمز S_n .





رتبة الزمرة Z_n هي n ! إذا كان احتمالات صورة العنصر الأول لأي تبديل هو n واحتمالات صورة العنصر الثاني $(n-1)$ والثالث $(n-2)$ وهكذا. أي أن هناك $n(n-1)(n-2)\dots(2-1)(1-1) = 0$!

من التباديل المختلفة الزمرة التباديل Z_n على المجموعة X حيث أن $|X| = n$.

مثال ١٣: رتبة الزمرة المتناظرة Z_3 هي ٦ عناصرها هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = D$$

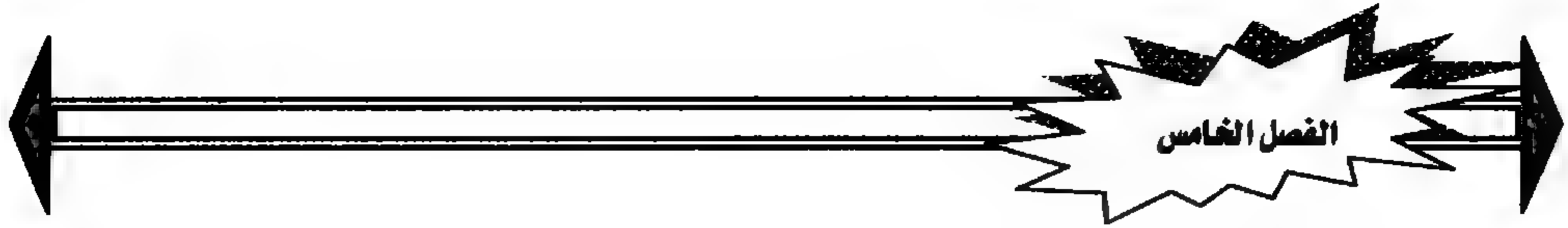
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = E$$

بما أنه يوجد نمطان فقط للزمرة ذات الرتبة ٦، الأول الزمرة الدائرية وهي زمرة أبيلية وبما أن Z_3 ليست أبيلية كما يتضح أدناه:

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = C$$

إذا الزمرة Z_3 متشاكلة تقابلياً مع الزمرة $Z = \langle A, B \rangle$ حيث أن $A^3 = B^3 = 1$ وللطالب أن يبرهن ذلك.





(٢-٢-٣) تعريف: إذا كانت Z زمرة تباديل على المجموعة X ون $|X| = n$ فإن

n تسمى درجة Z ، أي أن Z هي زمرة تباديل على X وبدرجة n .

(٢-٢-٤) تعريف: إذا كانت Z زمرة تباديل على المجموعة X وكانت $s \in X$

فإن مدار s بالنسبة للزمرة Z هو: $\{s, s^Z, s^{Z^2}, \dots\}$

ويرمز له بالرمز $Z(s)$.

(٢-٢-٥) تعريف: إذا كانت Z زمرة تباديل على المجموعة X ، $n = |X|$ فإن

أي عنصر $s \in X$ يسمى عنصراً ثابتاً بالنسبة إلى Z إذا كان $s^Z = s$ لكل التباديل $z \in Z$.

مثال ١٤: في زمرة التباديل الجزئية $H = \{I, (12)\}$ في الزمرة S_2 في المثال -

١٣ - نلاحظ أن العنصر $2 \in X$ هو عنصر ثابت كما أن مدار 2 بالنسبة إلى

H هو $\{1, 2\}$ وهو نفسه مدار 1 بينما مدار 2 هو $\{2\}$.

مثال ١٥: في الزمرة S_3 لا يوجد عنصر ثابت $s \in X$ ، كما أن مدار أي

عنصر في X هو $\{1, 2, 3\}$.

من الملائمة كتابة التبديل $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 4 & 3 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ بصف واحد فقط، مثلاً $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ يمثل بالرمز الدائري $(1\ 4\ 3\ 2)$ (٢) الذي يعني أن:

$$1 \leftarrow 4$$

$$4 \leftarrow 3$$

$$3 \leftarrow 2$$

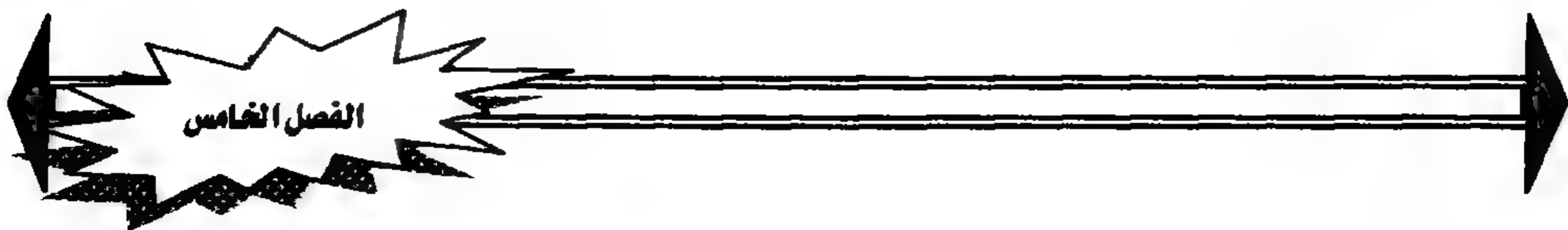
$$2 \leftarrow 1$$

وأحياناً نهمل كتابة العناصر الثابتة عندما نعرف درجة Z ، أي أننا نكتب

التبديل أعلاه بالشكل $(1\ 4\ 3\ 2)$ فقط وبالتالي فإن نظير التبديل $(1\ 3\ 2\ 4)$

(٤) سيكون التبديل $(1\ 4\ 3\ 2)$ والذي يعني





$$4 \leftarrow 1$$

$$3 \leftarrow 4$$

$$1 \leftarrow 3$$

مثال ١٦: التباديل في الزمرة

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = {}_2\pi \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = {}_1\pi \quad \text{نظري:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = {}_4\pi \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = {}_3\pi$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = {}_1\pi \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = {}_0\pi$$

تمثل بالرمز الدائري:

$$(0 \quad 4 \quad 3) = {}_3\pi \quad (2 \quad 1) = {}_2\pi \quad (0 \quad 3 \quad 2 \quad 1) = {}_1\pi$$

$$(4 \quad 2 \quad 1) = {}_0\pi \quad (4 \quad 3)(2 \quad 1) = {}_4\pi$$

$$(0 \quad 4 \quad 3 \quad 1) = {}_1\pi$$

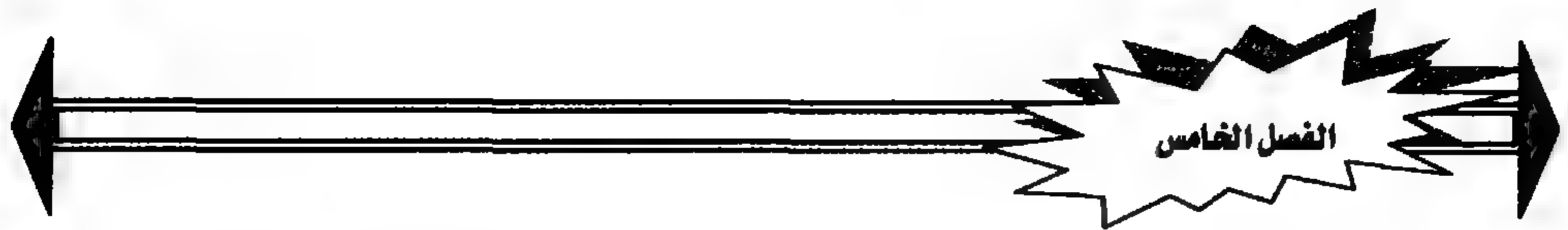
$$(2 \quad 1) = {}_2\pi \quad (2 \quad 3 \quad 0 \quad 1) = {}_1\pi \quad \text{كما أن نظائر هذه التباديل هي}$$

$$(2 \quad 4 \quad 1) = {}_0\pi \quad (4 \quad 3)(2 \quad 1) = {}_4\pi \quad (4 \quad 0 \quad 3) = {}_3\pi$$

$$(3 \quad 4 \quad 0 \quad 1) = {}_1\pi$$

يسمى $(0 \quad 3 \quad 2 \quad 1)$ في التبديل π في المثال أعلاه دورة، طول هذه الدورة هو عدد العناصر الموجودة فيها أي ٤ وبالتالي فإنها تسمى دورة رباعية،





كذلك يسمى كل من $(1 \ 2) \ (3 \ 4)$ في التبديل π ، دورة ثنائية، أي دورة طولها ٢ وبشكل عام إذا كان:

$$(1 \ p) \ (2 \ p) \ \dots \ (i \ p) \ \dots \ (j \ p) \ \dots \ (1+j \ p) \ \dots \ (r \ p) = \pi$$

$$(1 \ p) \ \dots \ (1+k \ p) \ \dots \ (n \ p)$$

فإن كلاً من $(1 \ p) \ (2 \ p) \ \dots \ (i \ p) \ \dots \ (j \ p) \ \dots \ (1+j \ p) \ \dots \ (r \ p) \ \dots \ (1+k \ p) \ \dots \ (n \ p)$

تسمى دورة في التبديل π ، إن طول الدورة $(i \ p)$ يكون واحداً بينما طول الدورة $(1+j \ p) \ \dots \ (1+k \ p)$ هو $(1-j)$ ، من جهة أخرى، إذا كانت π تبديلاً على المجموعة X فإن بالإمكان تجزئة X إلى مجموعات منفصلة يكون كل منها دورة للتبديل π كما مبين في أدناه:

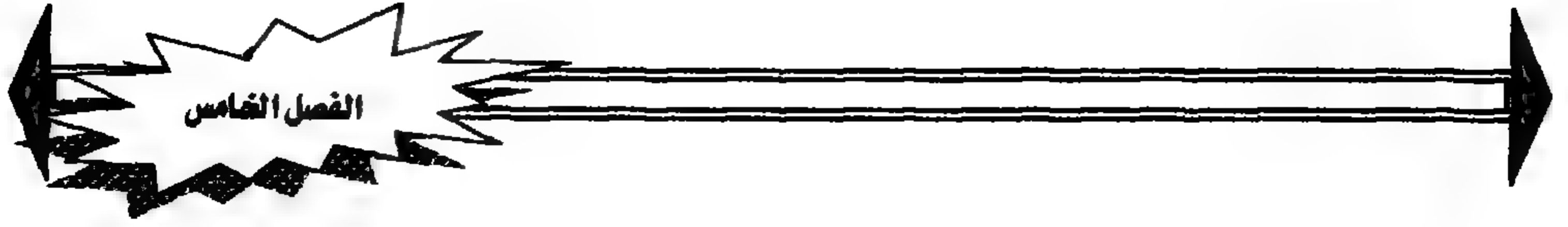
ليكن $s_1 \in s$

إذا كانت $s_1 = s_1^\pi$ فإن $\{s_1\}$ تكون دورة في π . أما إذا كانت $s_1^\pi \neq s_1$ فإننا نجد s_1^π حيث أن $\pi \pi = s_1^\pi$.

إذا كانت $s_1 = s_1^\pi$ فإن $\{s_1, s_1^\pi\}$ تكون دورة في π . أما إذا كانت $s_1^\pi \neq s_1$ فإننا نجد s_1^π . وهكذا نستمر بنفس الأسلوب إلى أن نصل إلى I بحيث $s_1^{\pi^4} = s_1$.

وهذا وارد لكون X مجموعة منتهية. في هذه الحالة المجموعة $\{s_1, s_1^\pi, s_1^{\pi^2}, \dots, s_1^{\pi^4}\}$ تكون دورة في π ، عندئذ نبدأ من جديد مع عنصر آخر





س_ز ∈ X بحيث أن س_ز ∉ {س_١, س_٢, ..., س_٢^π} ونكون دورة أخرى بنفس الأسلوب ومن ثم دورة أخرى إلى أن تتوزع جميع عناصر X في المجموعات التي تكون دورات π.

بما أن التبديل دالة متباينة، إذاً لا يوجد تقاطع بين هذه الدورات.

(٢-٢-٦) مبرهنة:

رتبة أي تبديل π هي المضاعف المشترك الأصغر لأطوال دوراته.

البرهان:

لتكن (س_١ س_٢ ... س_٢^π) دورة للتبديل π، بما أن س_٢^π = س_١ ⊕ j.

حيث أن i ⊕ j = (j+i) (mod n) فإن س_٢^π = س_١ إذاً فقط إذا كانت م

أحد مضاعفات n، فهذا يعني أن س_٢^π = س_١ لكل العناصر س_١ ∈ X إذاً فقط إذا كان م* المضاعف المشترك الأطول لدورات π فإن رتبة π هي المضاعف المشترك الأصغر لدوراته.

(٢-٢-٧) مبرهنة تمهيدية:

إذا كانت π_١ = (١ ٢ ... ٢_١) (٢_٢ ... ٢_٢) ... (٢_٢ ... ٢_٢)

$$\left(\begin{matrix} ١ & ٢ & \dots & ٢_١ & ٢_٢ & \dots & ٢_٢ \end{matrix} \right) \cdot \left(\begin{matrix} ١ & ٢ & \dots & ٢_١ & ٢_٢ & \dots & ٢_٢ \\ ٢_١ & ٢_٢ & \dots & ٢_٢ & ٢_٢ & \dots & ٢_٢ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ٢_٢ & ٢_٢ & \dots & ٢_٢ & ٢_٢ & \dots & ٢_٢ \end{matrix} \right) = \pi_٢$$

فإن



البرهان:

بما أن:

(٢-٢-٨) مبرهنة: أي تبديلين في الزمرة المتناظرة Z_n يكونان مترافقين إذا وفقط إذا كانا يملكان نفس العدد من الدورات لكل طول.

البرهان: إذا كانا التبديلان مترافقين فإنهما يملكان نفس العدد من الدورات لكل طول حسب المبرهنة التمهيدية السابقة.

الآن نفرض أن

$$r^* = (b_1 \dots b_{11}) (b_{12} \dots b_{22} s^*) (b_1 \dots b_m) \dots$$

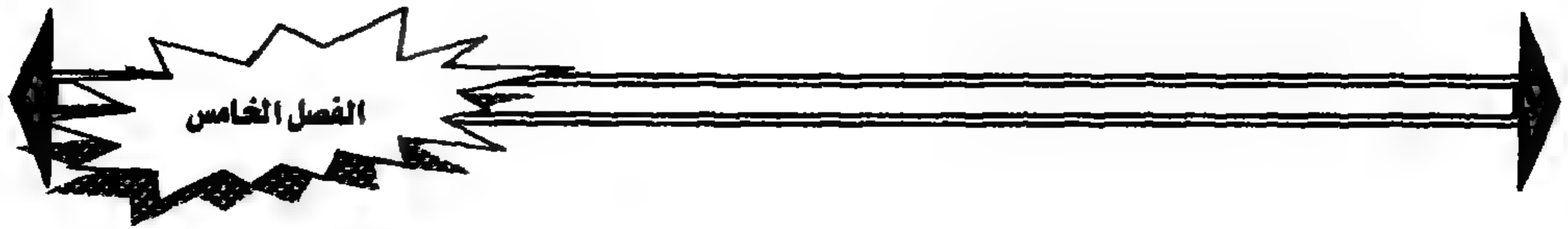
أي أن التبدلين يملكان نفس العدد من الدورات لكل طول. إذاً التبدل

ك* $\in \mathbb{Z}_2$ حيث أن:

$$\left(\begin{array}{c} P_1 \dots P_{n-1} \text{ در } P_n \\ P_1 \dots P_{n-1} \text{ ب } P_n \end{array} \right) = * \text{ك}$$

يحقق العلاقة $K^{*-1}t = K^*r$.

مثال (١٧): في الزمرة المتناظرة Z_3 نلاحظ أن التبدلين (١ ٢ ٣) و (١ ٣ ٢) مترافقان بواسطة التبديل (١ ٢) (١ ٣) إذاً (١ ٢ ٣) = (١ ٣ ٢)



(٣ ٢) (٣ ١) (٢ ١) (٢) (٣) كما أن التباديل (٣ ٢) (١) (٢ ٣ ١) مترافقة بواسطة التبديل (٣ ٢ ١).

$$\text{إذ } (٣ ١) (٢) = (٢ ٣ ١) (٣ ٢) (١) (٢ ٣ ١).$$

$$(٢ ١) (٣) = (٢ ٣ ١) (٣ ١) (٢) (٢ ٣ ١).$$

ما تقدم يتبين أن عدد صفوف الزمرة المتناظرة Z_n على المجموعة X هو نفس عدد احتمالات تجزئة المجموعة X . وإن عملية التجزئة تمثل بالرمز

$١ \rightarrow ١, ٢ \rightarrow ٢, ٣ \rightarrow ٣, \dots, n \rightarrow n$ والتي تعني أن هناك n من الدورات التي طول كل منها ١ و $n-١$ من الدورات التي طول كل منها ٢، هن من الدورات التي طول كل منها n .

مثال ٨: التبديل (١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) يقع ضمن صف التبديلات الممثلة $1^3 2^2$. والتبديل (١) (٢ ٣) (٤ ٥ ٦) (٧) يقع ضمن صف التبديلات الممثلة بالتجزئة.

مثال ٩: صفوف الزمرة المتناظرة $Z_٧$ هي:

٣	٢ ١	٣ ١
(٣ ٢ ١)	(٣ ٢) (١)	(٣) (٢) (١)
(٢ ٣ ١)	(٣ ١) (٢)	
	(٢ ١) (٣)	



مثال ٢٠: صفوف الزمرة المتناظرة S_n هي:

ξ	$\gamma \gamma 1$	$\gamma \gamma$	$\gamma 1$	$\xi 1$
$(\xi \gamma \gamma 1)$	$(\xi \gamma)(\gamma)(1)$	$(\xi \gamma)(\gamma 1)$	$(\xi \gamma \gamma)(1)$	$(\xi)(\gamma)(\gamma)(1)$
$(\gamma \xi \gamma 1)$	$(\xi \gamma)(\gamma)(1)$	$(\xi \gamma)(\gamma 1)$	$(\gamma \xi \gamma)(1)$	
$(\xi \gamma \gamma 1)$	$(\gamma \gamma)(\xi)(1)$	$(\gamma \gamma)(\xi 1)$	$(\xi \gamma 1)(\gamma)$	
$(\gamma \xi \gamma 1)$	$(\xi 1)(\gamma)(\gamma)$		$(\gamma \xi 1)(\gamma)$	
$(\gamma \gamma \xi 1)$	$(\gamma 1)(\gamma)(\gamma)$		$(\xi \gamma 1)(\gamma)$	
$(\gamma \gamma \xi 1)$	$(\gamma 1)(\xi)(\gamma)$		$(\gamma \xi 1)(\gamma)$	
			$(\gamma \gamma 1)(\xi)$	
			$(\gamma \gamma 1)(\xi)$	

(٢-٢-٩) مبرهنة: إذا كانت π تبديلاً يقع ضمن صف التباديل الممثلة بالتجزئة.

١-١ ٢-٢ ٣-٣ ن-ن فإن عدم التباديل المرافقة إلى π (أ) التي تقع

ضمن نفس صف التبديل (π) في الزمرة المتناظرة Z_n هو:

! ۱۰ هـ ۲! ۲۸ هـ ۳! ۳۸ هـ ... ن! ۴۵ هـ

البرهان: نفرض أن π يقع ضمن صف التبديلات الممثلة بالتجزئة أي أن:

١٠١ ١٠٢ ١٠٣ ن

$$\underbrace{(\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot)}_{\text{5}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \underbrace{(\cdot)}_{\text{1}} \quad \underbrace{(\cdot \cdot)}_{\text{2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \underbrace{(\cdot \cdot)}_{\text{2}} (\cdot \cdot)_{\text{2}} \quad \underbrace{(\cdot)}_{\text{1}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \underbrace{(\cdot)}_{\text{1}} (\cdot)_{\text{1}} = \pi$$

من الواضح أن هناك من الفراغات يمكن أن تملأ بعناصر، بأي شكل كان، لكي تعطي تبديل في زمن، جميع هذه التباديل في نفس صف التباديل الممثلة بالتجزئة أعلاه.

لذا، هناك ن! من الاحتمالات لتنظيم هذه العناصر التي تعطي تباديل في زمر S_n ولكن هذه التباديل ليست جميعها متميزة.

بنفس الوقت فإن كل دورة (١٢ ٢١ ٢٢) يمكن أن تكتب بـ z من الاحتمالات وهي:

إذاً، أي تبديل في زمر محسوب $1^m 1^m 2^2 2^2 \dots n^{m_n} n^{m_n}$ من المرات بما يخص جميع الدورات التي تمثل $\pi \neq \text{id}$.

(١٠-٢-٢) قضية:

إذا كان π تبديلاً يقع ضمن صف التباديل الممثلة بالتجزئة

١-٢ن من فإن رتبة المركز إلى π في زعن هي:

$$|مركز(\pi)| = 1^1 1^1 2^2 2^2 \dots n^{n-1} n^{n-1}$$

مثال ٢١: في الزمرة المتناظرة Z_n ، التبديل $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)(5)$ يقع

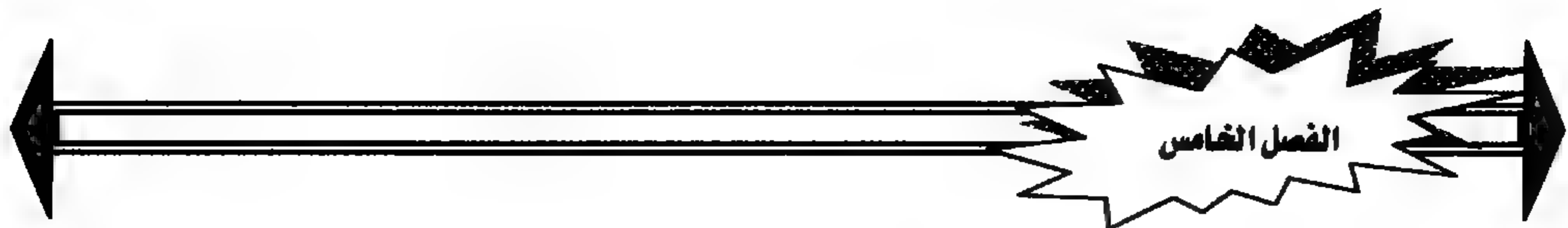
ضمن صف التباديل المثلة بالتجزئة ${}^1 1^{\circ}$ ، إذا:

$$.12 = !3 . ^3 1 . !1 . '2 = |(p)_{مرط}|$$

وهي التباديل: $(1) (2) (3) (4) (5), (1) (2) (3) (5) (4)$

(0 2) (3) (2 1) < (0 2) (3) (2) (1)

(0 3) (4) (2 1) , (0 3) (4) (2) (1)



(٤ ٣) (٥) (٢ ١) ، (٤ ٣) (٥) (٢) (١)

(٥ ٤ ٣) (٢ ١) ، (٥ ٤ ٣) (٢) (١)

(٤ ٥ ٣) (٢ ١) ، (٤ ٥ ٣) (٢) (١)

(١١-٢-٢) تعريف: نسمي التبديل الذي يتكون من دورة واحدة بطول ٢ (أي دورة ثنائية واحدة) بينما يكون طول بقية الدورات ١ فقط تبديلاً ثنائياً. أي أنه يقوم بتثبيت جميع العناصر ما عدا اثنين. من الواضح أن أي تبديل يقع ضمن صف التباديل الممثلة بالتجزئة 2^1 هو تبديل ثنائي (Transposition).

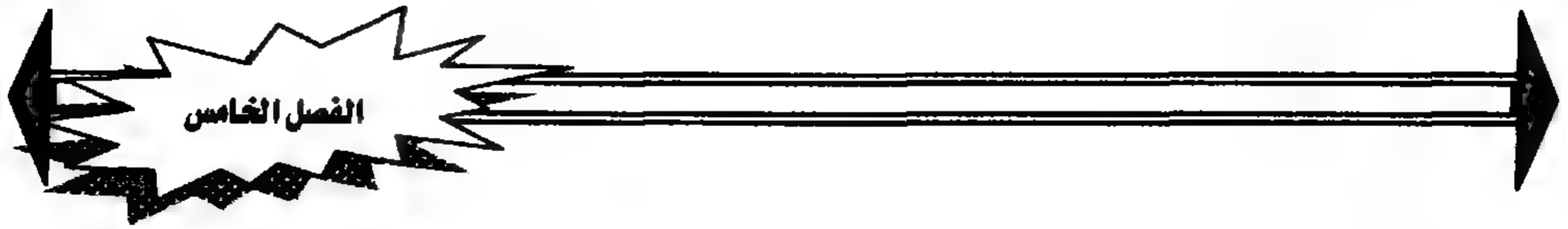
مثال ٢٢: التباديل الثنائية في 2^2 هي:

٢	١
(٣ ٢)	(١)
(٣ ١)	(٢)
(٢ ١)	(٣)

مثال ٢٣: التباديل الثنائية في 2^3 هي:

٢	2^1
(٤ ٣)	(٢) (١)
(٤ ٢)	(٣) (١)
(٣ ٢)	(٤) (١)
(٤ ١)	(٣) (٢)
(٣ ١)	(٤) (٢)
(٢ ١)	(٤) (٣)





من الواضح أن زمرة التناظر Z_n تحتوي على $\frac{n(n-1)}{2}$ من التباديل الثنائية.

(١٢-٢-٢) مبرهنة:

كل تبديل يمكن أن يمثل على شكل حاصل ضرب تباديل ثنائية.
البرهان: كل تبديل يمثل بالرمز الدائري على شكل دورات. كل دورة يمكن تمثيلها على شكل حاصل ضرب تباديل ثنائية كما مبين أدناه.
 $(1\ 2\ \dots\ n) = (1\ 2)(2\ 3)\dots(n-1\ n)$
مثال ٢٤:

نبين في أدناه تمثيل بعض عناصر Z_4 على شكل حاصل ضرب تباديل ثنائية.

$$\begin{aligned} (1\ 2\ 3\ 4) &= (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4) \\ (1\ 3\ 2\ 4) &= (1\ 3)(3\ 2)(2\ 4) \\ (1\ 4\ 2\ 3) &= (1\ 4)(4\ 2)(2\ 3) \end{aligned}$$

وعند إهمال العناصر الثابتة فإنها تمثل كما يلي:

$$(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2)(2\ 3)$$

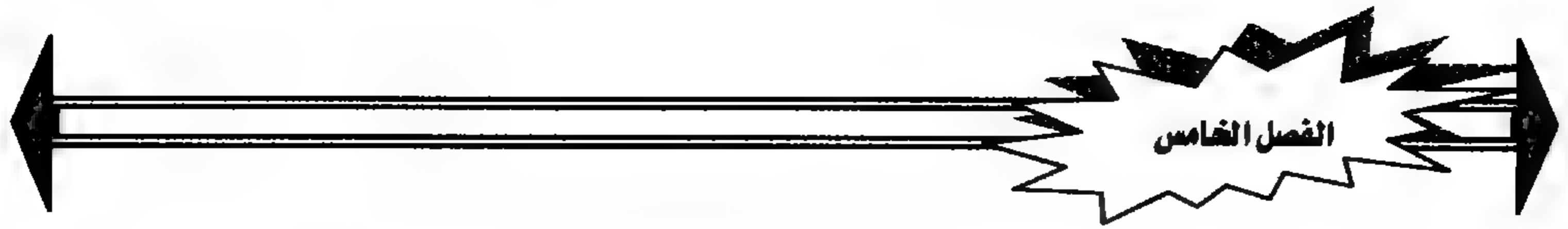
$$(1\ 3\ 2\ 4) = (1\ 3)(3\ 2)$$

(١٣-٢-٢) وهكذا نتيجة:

الزمرة المتناظرة Z_n تولد من الـ $(1\ 2)$ من التبادل الثنائية

$$(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4), \dots, (n-1\ n).$$





(٢-٢-١٤) تعريف: التبديل الزوجي (Even Permutation) :

التبديل الزوجي هو التبديل الذي يمكن تمثيله بشكل حاصل ضرب عدد زوجي من التباديل الثنائية على هذا الأساس فإن التبديل الفردي (odd permutation) هو الذي يمثل بشكل حاصل ضرب عدد فردي من التباديل الثنائية.

من الواضح أن العنصر المحايد يعتبر تبديلاً زوجياً إذ يمكن تمثيله بشكل حاصل ضرب أي تبديلين ثنائيين متساويين. مثلاً:

$$(1)(2)(3).....(n) = (1)(2)(1)(2).....$$

من الواضح أنه إذا كانت π_1, π_2 تبديلين زوجيين و π_3, π_4 تبديلين فرديين فإن π_1, π_2 تبديل زوجي، π_3, π_4 تبديل فردي، π_1, π_3 تبديل زوجي إذ أن عدد التباديل الثنائية إلى π_i, π_j هو مجموع التباديل الثنائية لكل من π_i و π_j مطروحاً منه عدد التباديل الثنائية المتشابهة وهو عدد زوجي دائماً.

مثال ٢٥:

$$\text{ليكن } 1 = (1)(2)(3)(4)(5) \quad \text{جـ} = (1)(2)(3)(4)(5)$$

$$\text{ب} = (1)(2)(4)(5)(3)$$

$$\text{د} = (1)(2)(3)(4)(5) \quad \text{من الواضح أن 1، ب تبديلان زوجيان لكون}$$

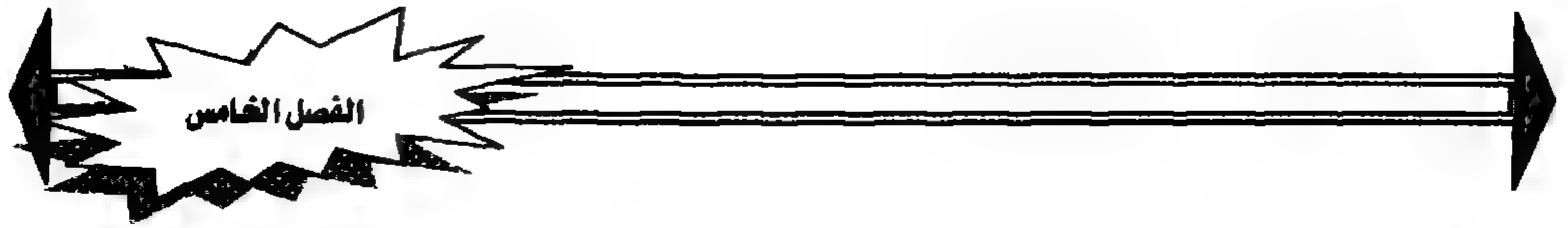
$$1 = (1)(2)(3)(4)(5) \quad \text{ب} = (1)(2)(4)(5)(3)$$

بما أن:

$$\text{ب} = (1)(2)(3)(4)(5) \quad \text{حيث أن } (1)(2)(3)(4)(5) \text{ متكررة مرتين}$$

$$\text{وأن } 1 = (1)(2)(3)(4)(5)$$





١ب = (١ ٣) (٤ ٥) تبديل زوجي.

التبديلات ج د فرديان لكون

$$ج = (١ ٢) (١ ٣) (١ ٤) = د (١ ٢)$$

بما أن ج د = (١ ٢) (١ ٣) (١ ٤) (١ ٢) (١ ٣) (١ ٤). فإن

ج د تبديل زوجي.

(١٥-٢-٢) مبرهنة: تكون مجموعة التباديل الزوجية في كل زمرة تباديل ز،

زمرة جزئية سوية ه في ز كما أن: $٢ = [ز:ه]$ أو $١ = [ز:ه]$

البرهان: لتكن ه مجموعة التباديل الزوجية في ز، فإن ه زمرة جزئية في

الزمرة ز (للتطلب أن يتحقق من ذلك) فإذا كانت $ز = ه$ فإن المبرهنة صحيحة.

نفرض أن $ه \neq ز$ أي يوجد على الأقل تبديل فردي π_1 في ز، $\pi_1 \notin ه$ إذاً:

$\pi_1 \neq ه$ ولتكن π_2 تبديلاً فردياً آخر في ز بحيث أن $\pi_2 \notin ه$.

فإن $\pi_1 \pi_2$ تبديل زوجي وبالتالي فإنه ينتمي إلى

$$ه، إذاً ه = \pi_1 \pi_2 \leftarrow ه = \pi_1 ه = \pi_2 ه$$

هذا يعني أن $٢ = [ز:ه]$ وبالتالي فإن $ه \geq ز$.

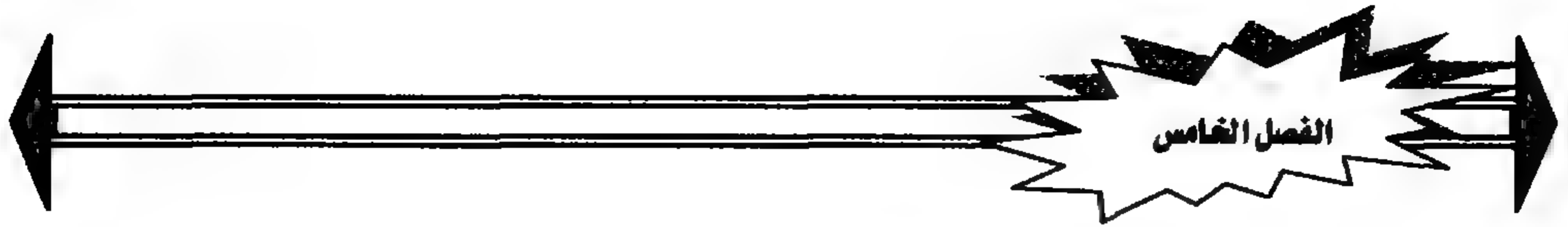
(١٦-٢-٢) تعريف: الزمرة المتناوبة (Alternating group)

زمرة التباديل الزوجية، وهي زمرة جزئية سوية في $ز_n$ ، $٢ < n$ ، تسمى

الزمرة المتناوبة ويرمز لها بالرمز $ز_n$ ، رتبة هذه الزمرة هي $\frac{1}{٢} n!$.

$$أي أن [ز_n: ز_n] = ٢$$





مثال ٢٦: الزمرة المتناوبة في Z_3 هي: $|Z_3| = 3$, $Z_3 = \{(1) (2) (3)\}$,
 $\{(1) (2) (3)\}, \{(3) (2) (1)\}$

(١٧-٢-٢) مبرهنة: الزمرة المتناوبة Z_n , $n \leq 3$ تولد بالتباديل
 $(1) (2) (3), (1) (2) (3) \dots (1) (2) (3) \dots (1) (2) (3)$.

البرهان: نحن نعلم بأن كل تبديل زوجي يمكن تمثيله بشكل حاصل ضرب
 عدد زوجي من التباديل الثنائية أي أن Z_n يمكن أن تولد بالأزواج
 $(i) (j)$ إذا كانت $i = j$ فإن

$$(j) (i) = (i) (j) = (j) (i)$$

لذلك سنفرض أن $i \neq j$, في هذه الحالة $(i) (j) = (j) (i)$

إذا كانت $i = 2$ فالمبرهنة صحيحة إذ أننا سنحصل على التبديل
 $(1) (2)$ وهو أحد التباديل في المبرهنة أعلاه.

كذلك إذا كان $i = 3$ فإن المبرهنة صحيحة إذ أننا سنحصل على

$$(1) (2) (3) = (3) (2) (1) = (j) (i)$$

أما إذا كانت $i < 2$, و $j < 2$ فإن

$$(1) (2) (3) = (3) (2) (1) = (j) (i) \text{ من الواضح أن } (1) (2) (3) = (j) (i)$$

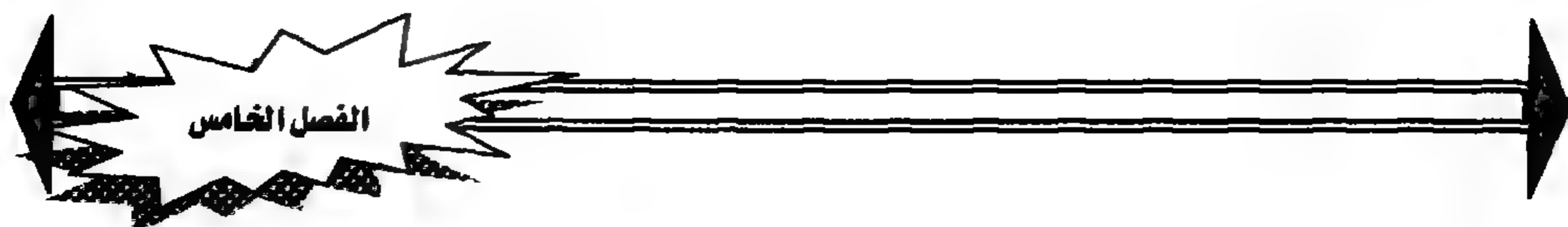
$(1) (2) (3), (j) (i)$ تقع جميعها ضمن التباديل أعلاه #

(١٨-٢-٢) مبرهنة: الزمرة المتناوبة Z_n ليست بسيطة.

البرهان: بما أن Z_n زمرة التبادل الزوجية في Z_n تحتوي على التباديل

التالية:





$2 \ 2$	$3 \ 1$	$4 \ 1$
$(\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$
$(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 \end{smallmatrix})$	
$(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix})$	$(\begin{smallmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$	
	$(\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$	
	$(\begin{smallmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix})$	
	$(\begin{smallmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix})$	
	$(\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 \end{smallmatrix})$	
	$(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 \end{smallmatrix})$	

ولتكن $V = \{(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix})\}$.

من الواضح أن V زمرة جزئية ذاتية.

بما أن التبدلين μ و μ^{-1} μ نفس الرتبة وهي 2 عندما

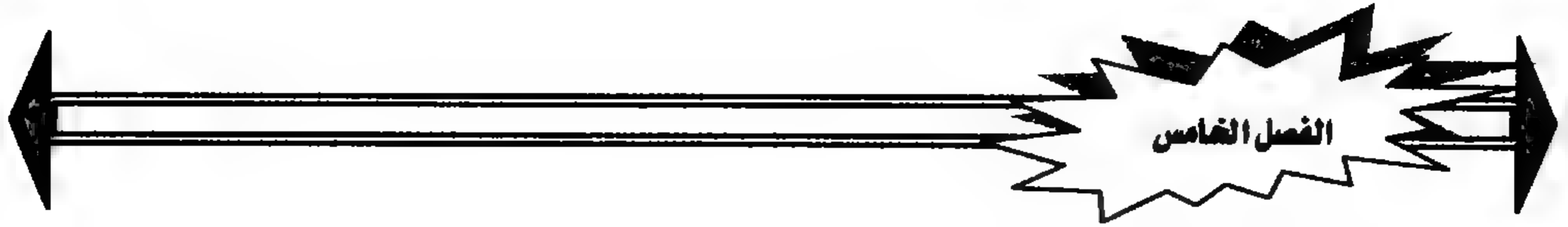
$$b \in \mu^{-1}(a), \quad V \in \mu$$

وبما أن V تحتوي على جميع عناصر ذات الرتبة 2. فإن V تحتوي على جميع العناصر المرافقة لعناصرها بواسطة عناصر ذات الرتبة 2. هذا يعني أن $V \supseteq Z_2$.

(٢-٢-١٩) **مبرهنة غالوا (Galols Theorem):**

الزمرة المتناوبة Z_n بسيطة عندما $n \neq 4$.





البرهان: بما أن $|Z_n| = 1$ و $|Z_n| = 3$ والعدد 3 أولي فإن Z_n وزمترتان بسيطتان الآن نفرض أن $n \leq 5$ ، وسنبرهن أنه إذا كانت $s \in Z_n$ وكانت $|s| \neq 1$ فإن $s = Z_n$. لتكن $s \in Z_n$ و $|s| \neq 1$.

(أ) نفرض أن s تحتوي على التبديل $\alpha = (a \ b \ c)$ ، سنبرهن أن s تحتوي على جميع التبديدات $\beta = (s \ v \ e)$ حيث أن s ص ع عناصر مختلفة وهذا يعني حسب المبرهنة السابقة أن $s = Z_n$ ليكن $\gamma = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & s & v \end{pmatrix}$ أن تبديل الزمرة المتناظرة Z_n ومن الواضح أنه لا يثبت على الأقل عنصرين في \times ، على أساس أن العناصر التي لم تدرج في γ عناصر ثابتة وأن $n \leq 5$ كذا بالنسبة إلى α ومن الواضح أن:

$\beta = \gamma \alpha^{-1} \gamma$. فإذا كانت γ تبديلاً زوجياً فإن هذا يعني أن β مرافق α في Z_n وبالتالي فإن $\beta \in s$. لكون $s \in Z_n$.

أما إذا كانت γ تبديلاً فردياً فإن $\delta \gamma$ ستكون تبديلاً زوجياً ينتمي إلى Z_n لأي تبديل فردي δ . ليكن $(h \ q) = \delta$ حيث أن f ، ه عنصران ثابتان بالنسبة إلى α ، من الواضح أن δ تبديل فردي كما أنها تحقق صفة الإبدال مع α ، لذا $(\gamma \alpha) \alpha^{-1} (\gamma \delta) = \gamma \delta \alpha^{-1} \delta^{-1} \gamma = \gamma \delta \alpha^{-1} \gamma = \gamma \delta \alpha^{-1} \gamma = \beta = \gamma \alpha^{-1} \gamma$.

وهذا يعني أن β هو مرافق α في Z_n وبالتالي فإن $\beta \in s$

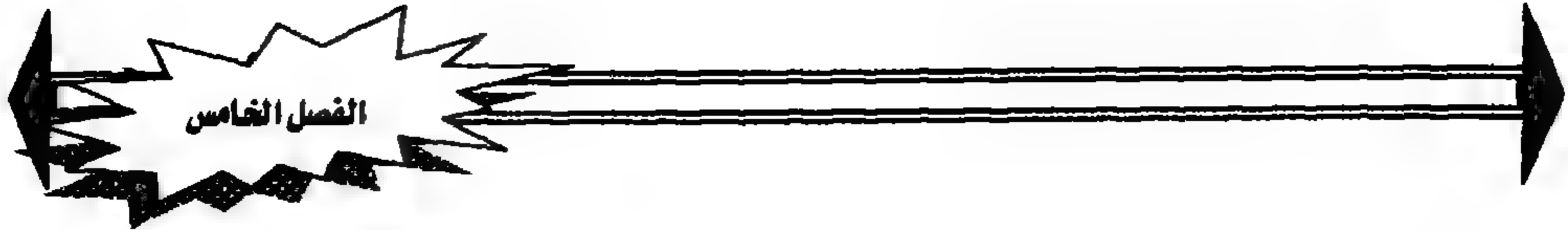
لكون $s \in Z_n$.

الآن برهنا بأنه إذا كانت $\alpha \in s$ تبديلاً في صف التجزئة 3 ١ (٣-٥)

فإن $s = Z_n$.

(ب) نفرض أن s تحتوي على التبديل $\omega = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_n$.





حيث أن $\frac{\gamma \dots \gamma \gamma \gamma \gamma}{(\gamma \dots \gamma \gamma \gamma \gamma)} = \gamma$ دورات، كما أن طول الدورة γ أكثر من ٣

حيث أن $m < 3$ ومن الواضح أن $\sigma = (1 \ 2 \ 3) = \sigma$ تبديل زوجي يحقق صفة الإبدال مع كل الدورات $\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma$.

$\sigma \omega^{-1} = \omega$ $(\sigma \gamma^{-1} \sigma) = \sigma \gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma$. ينتمي إلى زمرة Z لكون $\sigma \in Z$. كذلك $\omega \omega^{-1} = 1$ لكون σ من زمرة Z .

بما أن كلا من γ و $\sigma \gamma^{-1} \sigma$ يحقق صفة الإبدال مع $\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma$ فإن:

$$(\sigma \omega^{-1} \sigma) = \omega^{-1} \omega$$

$$(\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma) (\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma) = (\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma) (\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma) =$$

$$(\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma) (\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma) = (\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma) (\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma) =$$

$$(\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma) = (\gamma \gamma \gamma \gamma \gamma \dots \gamma)$$

وهذا يعني كما برهنا في الجزء الأول أن $\sigma \in Z$.

(ج) نفرض أن σ تحتوي التبديل $\alpha \beta \lambda = \omega$ الذي يحتوي على دورتين طول كل منهما ٣ في الأقل، أي أن:

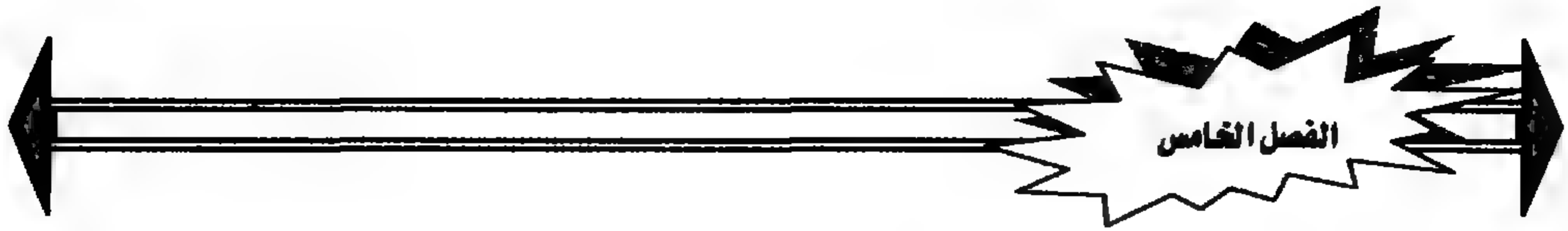
$$\alpha = (1 \ 2 \ 3) = \beta = (1 \ 2 \ 3) \text{ كما أن } \lambda \text{ لا تعتمد على } \alpha, \beta.$$

حيث $h = 1, 2, 3$

لتكن $\sigma = (1 \ 2 \ 3)$ تبديلاً في Z ومن الواضح أن σ تحقق صفة

الإبدال مع λ بما أن $\sigma \in Z$.





$$\lambda (\sigma \beta^{-1} \sigma) (\sigma \alpha^{-1} \sigma) = \sigma \lambda \beta \alpha^{-1} \sigma = \sigma \omega^{-1} \sigma = {}_1\omega$$

يتمى إلى زمرة

$$= {}_1\omega \text{ بما أن س زمرة، فإنها تحتوي على التبديل } {}_1\omega^{-1} \text{ حيث أن } {}_1\omega = (\sigma \alpha^{-1} \sigma) (\sigma \beta^{-1} \sigma) {}_1\beta^{-1} \alpha$$

$$= ({}_1\beta \text{ ب } {}_2\beta) ({}_1\beta \text{ ب } {}_2\beta) ({}_2\beta \text{ ب } {}_3\beta) ({}_1\beta \text{ ب } {}_2\beta) = ({}_1\beta \text{ ب } {}_2\beta \text{ ب } {}_3\beta) {}_1\beta$$

هذا يعني أن س تحتوي على تبديل طول إحدى دوراته أكثر من ٣ لذا فإن $\text{س} = \text{زمرة}$. كما بينا في (ب).

د- نفرض أن $\omega \in \text{س}$ تبديل يحتوي على دورة واحدة فقط بطول ٣ أي أن: $\omega = ({}_1\beta \text{ ب } {}_2\beta \text{ ب } {}_3\beta)$ حيث أن λ حاصل ضرب دوراته ثنائية منفصلة، أي أن

$$\lambda = {}_1\omega^{-1} \text{، إذا } {}_1\omega = ({}_1\beta \text{ ب } {}_2\beta \text{ ب } {}_3\beta) \in \text{س}. \text{ وهذا ينتج كما بينا في (أ) أن } \text{س} = \text{زمرة}.$$

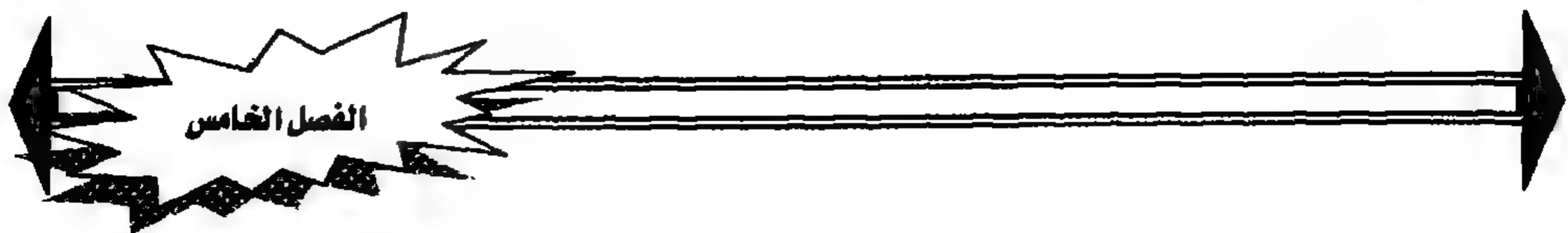
هـ) أخيراً نفرض أن $\omega \in \text{س}$ تبديل يحتوي دورات ثنائية فقط، وبما أن $n < 4$ فإن

$$\omega = ({}_1\beta \text{ ب } {}_2\beta) ({}_2\beta \text{ ب } {}_3\beta) \text{ حيث أن } \lambda \text{ لا تعتمد على } {}_1\beta, {}_2\beta, {}_3\beta \text{، ليكن ج عنصراً آخر يختلف عن } {}_1\beta, {}_2\beta, {}_3\beta \text{ فمن الواضح أن } \sigma = ({}_1\beta \text{ ب } {}_2\beta \text{ ب } {}_3\beta \text{ ب } {}_4\beta) = \delta ({}_1\beta \text{ ب } {}_2\beta \text{ ب } {}_3\beta \text{ ب } {}_4\beta) \text{ تبديلان في } \text{زمرة}.$$

بما أن $\text{س} \geq \text{زمرة}$ ، فإن س تحتوي التباديل ${}_1\omega, {}_2\omega, {}_3\omega, {}_4\omega$ حيث أن

$$\lambda ({}_1\beta \text{ ب } {}_2\beta) ({}_1\beta \text{ ب } {}_2\beta) = \sigma \omega^{-1} \sigma = {}_1\omega$$





$$(\omega_1 \omega_2)^{-1} = (\omega_1 \omega_2)^{-1} = \omega_1 \omega_2$$

$$(\omega_1 \omega_2)^{-1} =$$

$$(\omega_1 \omega_2)^{-1} = \omega_1 \omega_2 = \omega_1 \omega_2$$

$$(\omega_1 \omega_2)^{-1} = (\omega_1 \omega_2)^{-1} = \omega_1 \omega_2$$

من الواضح أن ω ؛ تبديل يحتوي على دورة بطول 3 فإن $\omega^3 = 1$ ،

(2-2-20) مبرهنة: عندما $n \leq 5$ فإن زمرة هي الزمرة الجزئية السوية غير التافهة الوحيدة في الزمرة المتناظرة S_n .

البرهان: نفرض أن $H \subseteq S_n$ حيث $|H| < n$ سنبرهن أولاً أن $|H| \neq 2$ نفرض أن

$H = \{1, \alpha\}$. إذا α تبديل ثنائي أو حاصل ضرب دورات ثنائية.

في الحالة الأولى نفرض أن $\alpha = (1 2)$ بما أن $n \leq 5$. إذن يوجد عنصر β يختلف عن α حيث يكون $\beta = (1 3)$ تبديلاً في S_n .

بما أن $H \subseteq S_n$ فإن H تحتوي التبديل $\beta \alpha^{-1} = \beta \alpha = (1 3)(1 2) = (1 2 3)$

$$(\beta \alpha)^{-1} = \alpha \beta^{-1} = \alpha \beta = (1 2 3)$$

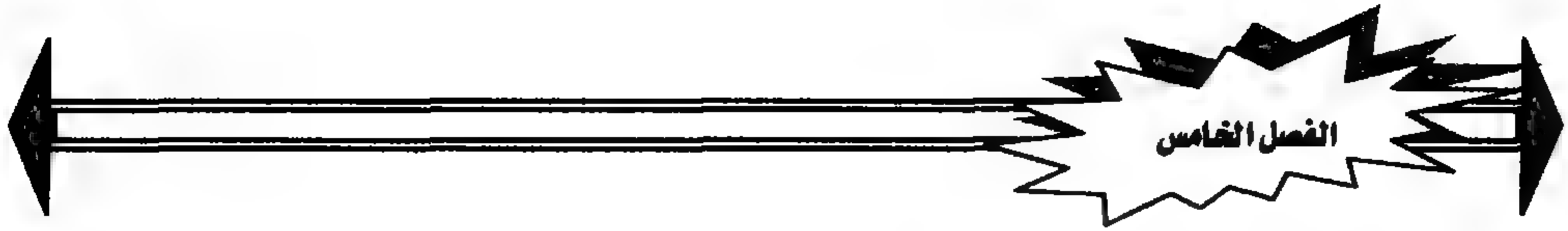
في الحالة الثانية نفرض أن $\alpha = (1 2 3)$ حيث λ لا تعتمد

على $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. التبديل $\sigma = (1 2 3 4)$ هو أحد تباديل الزمرة S_n ، بما أن $H \subseteq S_n$ فإن H تحتوي على التبديل.

$$\sigma \alpha^{-1} \sigma = \sigma \alpha \sigma^{-1} = (1 2 3 4)$$

$$\alpha \neq \lambda (1 2 3 4) =$$





هذا يعني كما في الحالة الأولى أن $|H| \neq 2$ ، لذا $|H| < 2$.

بما أن زمرة التباديل الزوجية $D = H \cap Z_n$ في الزمرة H تكون زمرة جزئية سوية بحيث أن $[D : H] = 2$ أو $[D : H] = 1$ فإن $D \geq Z_n$ كما أن $|D| < 1$.

بما أن Z_n زمرة بسيطة، فإن $D = Z_n$ هذا يعني أن $Z_n \geq H$ ولكن $H \not\geq Z_n$ فإن $|H| \geq \frac{1}{2} n$! وإن $|Z_n| = |H|$ وهذا يعني أن $Z_n = H$ لكون $Z_n \geq H$.

(٢-٢-٢١) تعريف: الزمرة المتعدية (Transitive Group)

لتكن Z زمرة تباديل على X ، إذا وجد لكل عنصرين $\alpha, \beta \in X$ ، تبديل $\epsilon \in Z$ بحيث أن $\epsilon\alpha = \beta$ فإن Z تسمى زمرة متعدية.

من الواضح أنه إذا كانت Z زمرة تباديل متعدية على X فإن $X = \{\epsilon \in Z : \epsilon \alpha = \beta\}$ لأي عنصر $\alpha \in X$.

كذلك إذا كانت $X = \epsilon$ حيث أن $\alpha \in X$ فإن Z زمرة متعدية.

(٢-٢-٢٢) تعريف:

لتكن $A \geq X$ حيث أن $Z = Z_n$ الزمرة المتناظرة على X . مجموعة التباديل في Z التي تثبت كل عنصر من عناصر المجموعة A تكون زمرة (للتألب أن يتحقق من ذلك). هذه الزمرة تسمى الزمرة المثبتة لعناصر المجموعة A (Pointwise stabilizer) ويرمز لها بالرمز stab_A أي أن:

$\text{stab}_A = \{\epsilon \in Z : \epsilon\alpha = \alpha \forall \alpha \in A\}$ أما زمرة التباديل في $Z = Z_n$ التي تثبت A كمجموعه فيرمز لها بالرمز stab_A وفي هذه الحالة فإن $\text{stab}_A = \{\epsilon \in Z : \epsilon\alpha = \alpha \forall \alpha \in A\}$



عندما $\{P\} = A$ فإننا نكتب Z بدلاً من $Z[A]$.

$$\cdot \{(\varepsilon \quad 3), I\} = [2, 1] \text{ ز}$$

$$\cdot \{(\xi \quad 3), (2 \quad 1), (2 \quad 1), (\xi \quad 3), I\} = (2, 1);$$

$$\cdot \{(\varepsilon \quad 3 \quad 1), (3 \quad 1), (\varepsilon \quad 1), (\varepsilon \quad 3), I\} = 2j$$

لكل العناصر ٢ في الزمر الثلاث أعلاه، أي أنها ليست متعدية للطالب أن يتحقق من أن الزمرة المتناظرة Z_n زمرة متعدية.

(٢٣-٢-٢) مبرهنة: $||\alpha z|| = ||z||$

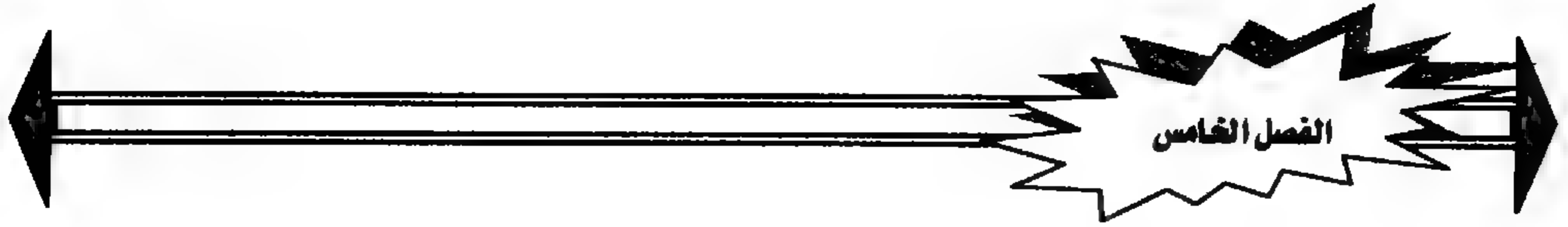
البرهان: سنبرهن ذلك من خلال حساب $|\alpha|$ بما أن:

$$\cdot \text{ } z \in \mathcal{C} \iff z \in {}^1\text{-}\mathcal{C} \iff \alpha = {}^1\text{-}\varepsilon \alpha \iff \text{}^2\alpha = \varepsilon \alpha$$

فإن عدد عناصر α^j هو نفس عدد المجموعات المشاركة اليمنى α هـ في ز

أي:

$$\neq \frac{|z|}{|\alpha z|} = [\alpha : z] = |\alpha_z|$$



(٢-٢-٢٤) نتيجة: $[\alpha : \beta] = | \alpha | / | \beta |$

البرهان: بما أن: $| \alpha | = | \alpha |$ فإن $[\alpha : \alpha] = 1$ $\neq 0$.

(٢-٢-٢٥) تعريف: زمرة التباديل Z على X تسمى زمرة ثنائية التعدي

(٢-transitive) إذا كان لكل زوج من المجموعات المرتبة $\{1, 2\}$

$\{1, 2\}$ يوجد تبديل $\sigma \in Z$ بحيث أن $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2$

يمكننا تعميم التعريف إلى زمرة ثلاثية التعديل أو رباعية التعدي

حيث تكون المجموعات المرتبة في هذه الحالة $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ويكون هناك تبديل $\sigma \in Z$ بحيث أن:

$\sigma(i) = i, \sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2, \dots, \sigma(n) = n$

طبعاً $n = 3$ عندما تكون الزمرة ثلاثية التعدي و $n = 4$ عندما تكون

الزمرة رباعية التعدي وهكذا من الواضح أنه إذا كانت Z زمرة ثنائية التعدي فإن

Z زمرة متعدية، كما أن $|Z| = |Z| = n(n-1) \dots 1$ حيث أن $n = |X|$ ، $b \in X$.

(٢-٢-٢٦) مبرهنة كايلي (Cayley Theorem)

كل زمرة منتهية التماثل تقابلية مع زمرة تباديل.

البرهان:

لتكن $Z = \{1, 2, \dots, n\}$ زمرة منتهية رتبها n ، إذا كانت $s^* \in Z$

فإن $Zs^* = \{1s^*, 2s^*, \dots, ns^*\} = \{1, 2, \dots, n\} = Z$ لكون Z مغلقة بالنسبة



للعلمية الشائبة نعرف الدالة هـ لكل عنصر س* \ni كما يلي:

هـ : س* ← $\left(\begin{array}{cc} ۱۲ & ۲۲ \\ ۱۲ & ۲۲ \end{array} \right)$

$$\left(\begin{array}{cc} p_1 & p_2 \\ s_1^* & s_2^* \end{array} \right) = (\text{س})^*$$

كذلك عندما ص* ٣ ز فإن:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 \dots 1 & 1 \\ * & * \end{array} \right) = (*, *)$$

لذا فإن:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} \text{پ} & \dots & \text{پ} & & & & \\ * & & * & \text{س} & * & \text{ص} & * \end{array} \right) = (\text{س} * \text{ص} *)$$

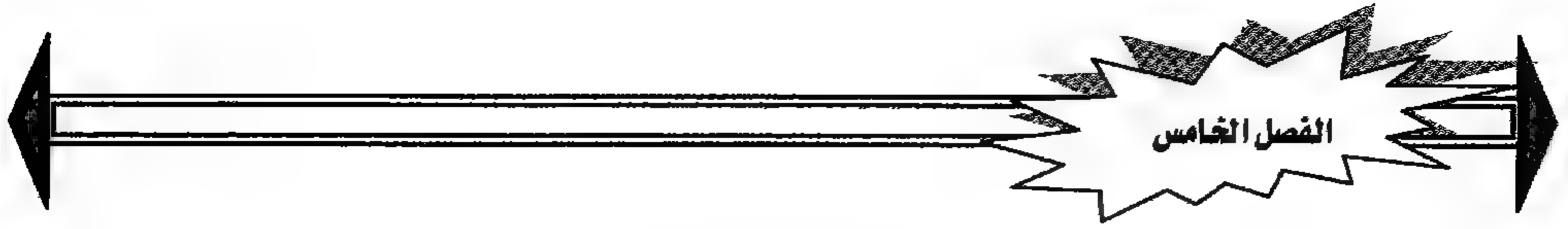
$$\begin{pmatrix} 1_P \dots 1_P & 1_P \\ * 1_P \dots * 1_P & 1_P \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{matrix} * & \dots & * \\ * & \dots & * \end{matrix} \right) \begin{matrix} * & \dots & * \\ * & \dots & * \end{matrix}$$

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} \mu_1 \dots \mu_n & \mu_1 \dots \mu_n \\ \mu_1 \dots \mu_n & \mu_1 \dots \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \dots \mu_n & \mu_1 \dots \mu_n \\ \mu_1 \dots \mu_n & \mu_1 \dots \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \dots \mu_n & \mu_1 \dots \mu_n \\ \mu_1 \dots \mu_n & \mu_1 \dots \mu_n \end{pmatrix}$$

وعليه فإن الزمرة المنتهية Z متشاكله تقابلياً مع زمرة تباديل لكون الدالة h

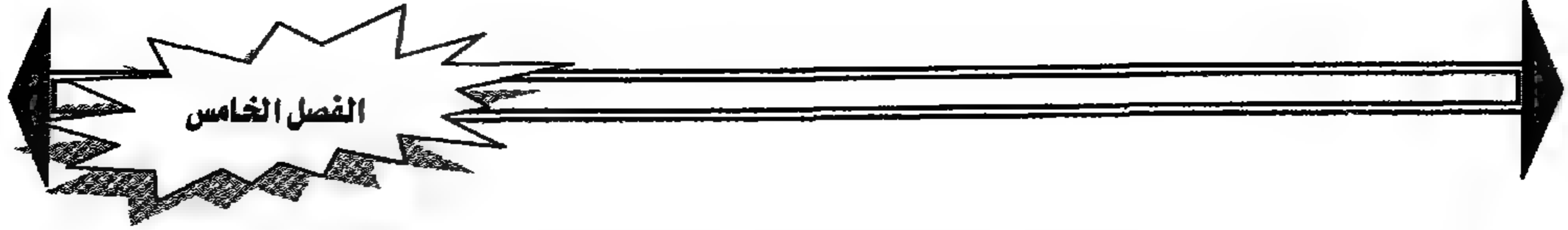
متباينة أيضاً (ونترك تحقيق ذلك للطالب)



تمارين

- ١- برهن أن Z_n تولد بالتباديل $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)$.
- ٢- برهن أن Z_n تولد بالتباديل $\alpha = (1\ 2), \beta = (2\ 3), \dots, \gamma = (n-1\ n)$.
- ٣- إذا كانت $Z = Z_n, \alpha \in Z$ حيث أن $\alpha = (1\ 2)(3\ 4)\dots(p\ p+1)$ فبرهن أن $M_Z(\alpha) = \{\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \alpha^n = I\}$.
- ٤- برهن أنه عندما $n \leq 3$ فإن مركز Z_n يحتوي على العنصر المحايد فقط.
- ٥- برهن أن مركز الرموز Z هو زمرة جزئية سوية في Z .
- ٦- برهن أن Z_n هي الزمرة الجزئية الوحيدة في Z_n التي تكون رتبها ١٢.
- ٧- برهن أن الزمرة الأبيلية تكون بسيطة إذا وفقط إذا كانت رتبها عدداً أولياً.
- ٨- برهن عدم وجود زمرة بسيطة رتبها ١٢.
- ٩- برهن أنه عندما $n \leq 4$ فإن مركز Z_n يحتوي على العنصر المحايد فقط.
- ١٠- جد ممرکز ومسوي E في Z_n حيث أن E هو أحد التباديل التالية:
(أ) $E = (1)(2)(3)(4)$ (ب) $E = (1)(2\ 3)(4)$
(ج) $E = (1\ 2)(3\ 4)$ (د) $E = (1\ 2\ 3\ 4)$
- ١١- جد الزمر الجزئية غير الدائرية في كل من Z_4, Z_6, D_4 ثم بين أيها منها متعددة.





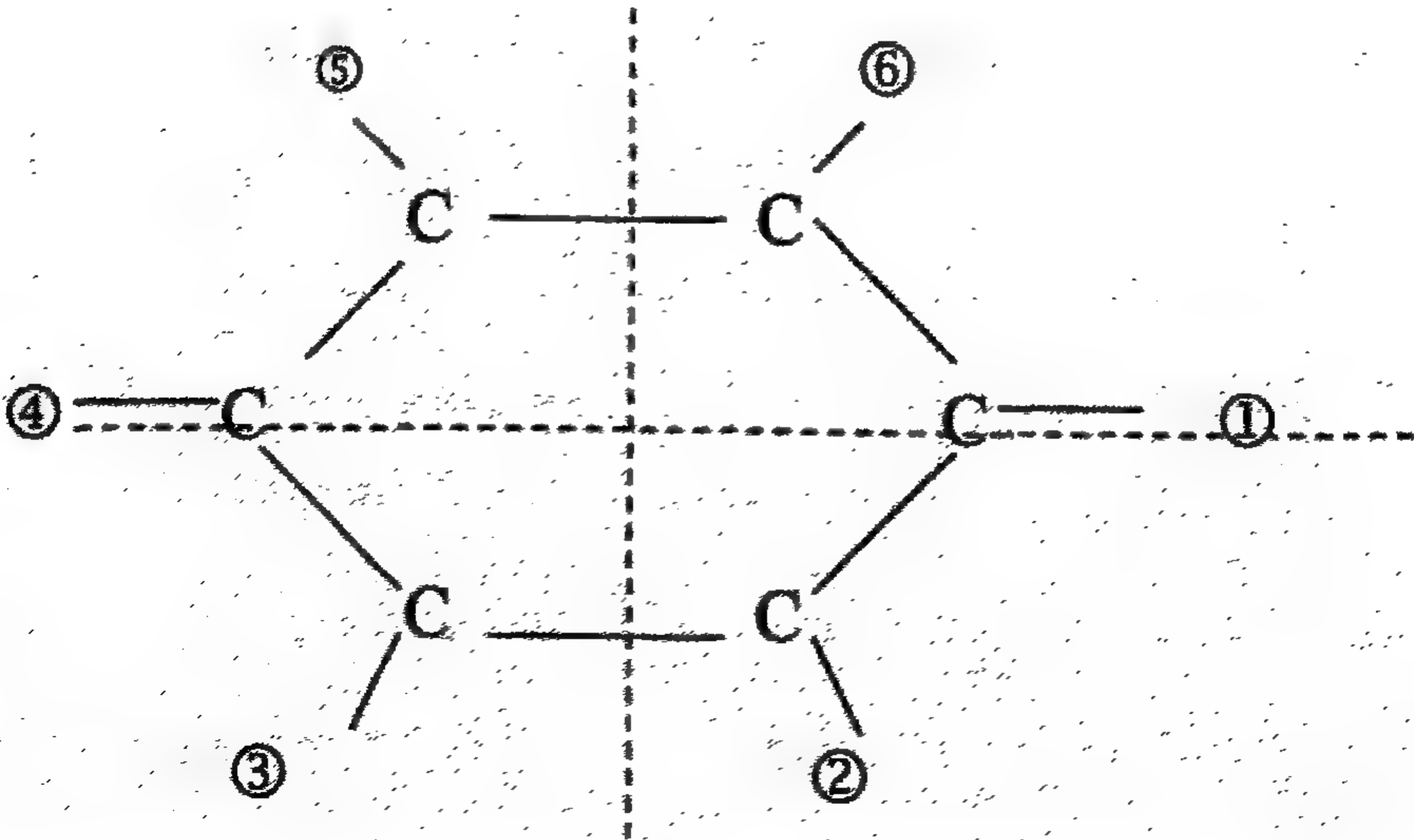
١٢ - جد الزمر الجزئية $[1]$ ، $[2, 1]$ و $[2, 1, 1]$ عندما تكون

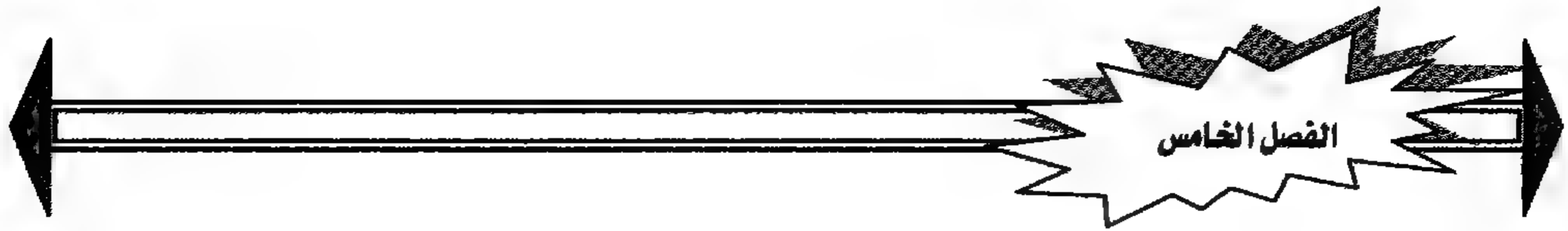
(أ) $z = z_{\text{خط}}$

(ب) $z = z_{\text{خط}}$

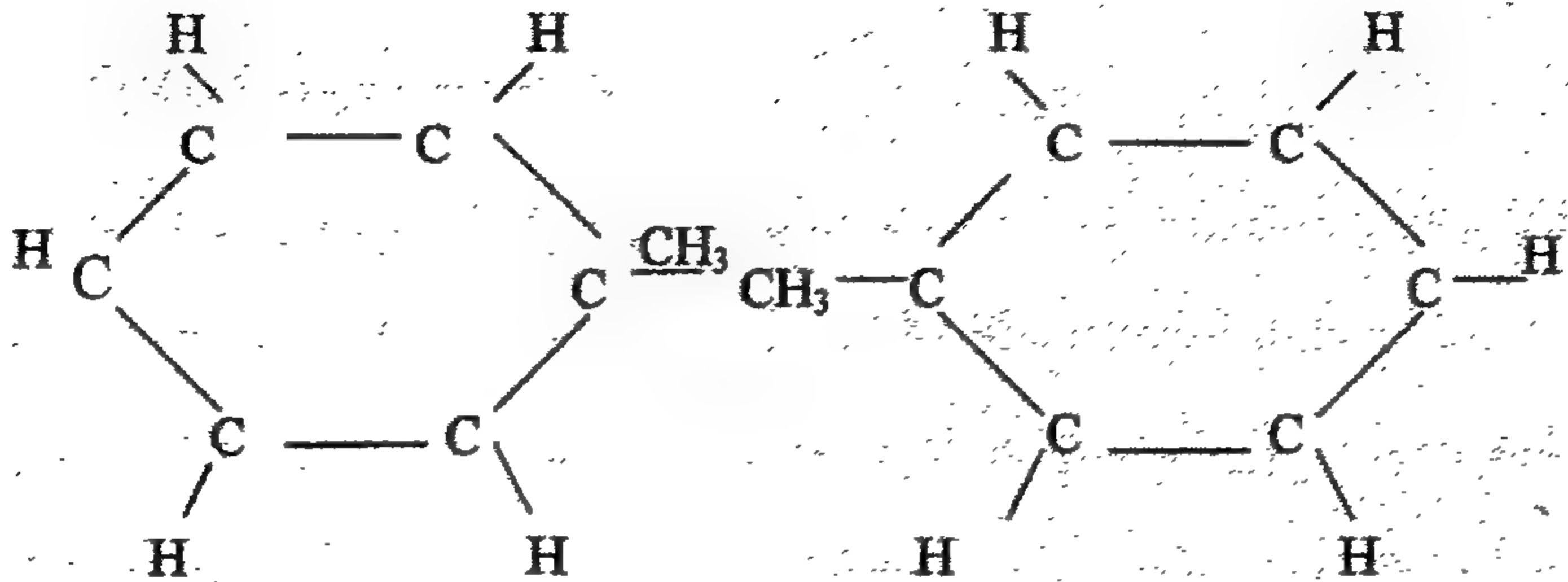
(٢-٣) بعض تطبيقات نظرية الزمر:

إذا كانت z زمرة تباديل على المجموعة X ، $n = |X|$ فإن طريقة بوليا - برنسايد في التعداد (polya - Burnside Method of Enumeration) تمكننا من حساب عدد المدارات التي ستتجزئ إليها المجموعة X تحت تأثير z ، هذه العملية مهمة جداً، في الكثير من الحالات، ففي الكيمياء مثلاً لو سألنا عن عدد أنواع المركبات الكيماوية التي يمكن الحصول عليها من خلال ارتباط ذرة الكربون في حلقة بتزن (benzene Ring) مع ذرة الهيدروجين H أو الجزئية CH_3 كما موضحة في الشكل:





فإن هناك 2^6 احتمالاً لتوزيع H أو CH_3 في الأماكن المرقمة في الشكل أعلاه، ولكنها ليست جميعاً مختلفة إذ أن هناك حالات متكافئة، أي تعطي نفس المركب فمثلاً التوزيعان أدناه يمثلان المركب نفسه.



إذ أن أيّاً منهما يكون نفسه الآخر ولكن بعد تدويره بزاوية قدرها 180° (Rotation) أو انعكاسه (Reflection).

وبشكل أوضح، هناك مثلاً ست حالات توزع فيها جزئية واحدة CH_3 وخمسة ذرات H ولكنها جميعاً تعطي المركب نفسه لكون عملية التدوير والانعكاس لا تغير من نوع المركب الكيماوي.

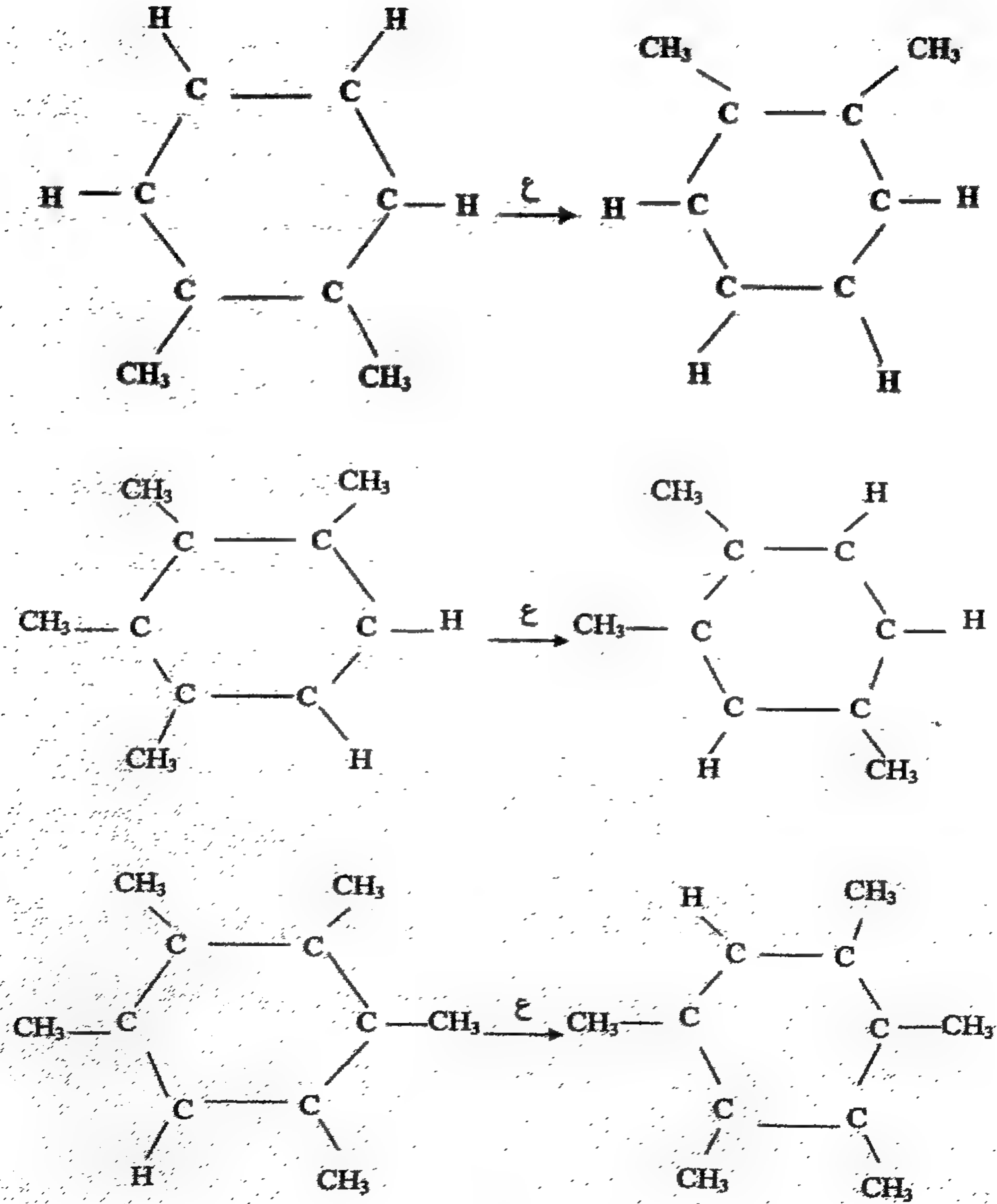
الزمرة D_6 تعمل كزمرة تبديل على X ؛ $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ كما أنها في الوقت نفسه تعمل على مجموعة المركبات الكيماوية S^1 البالغة 2^6 مركباً والتي تمثل جميع احتمالات توزيع ذرات الهيدروجين وجزئيات الإيثان.

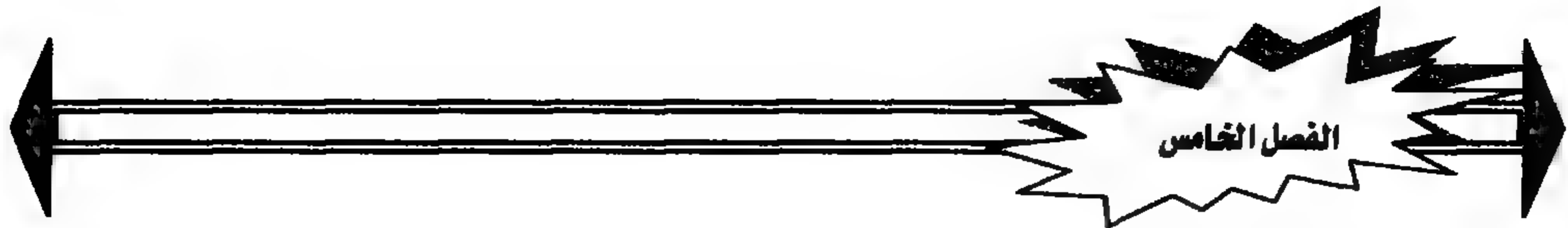
ومن الطبيعي أن عمل D_6 على المجموعة S^1 سينتج مدارات تتجزأ إليها المجموعة S^1 ، وأن عدد هذه المرات هو عدد المركبات الكيماوية المتميزة.



مثال (٢٨): التبديل

$D_1 \in \mathcal{C}$ حيث أن $\mathcal{C} = (1) (2) (3) (4) (5)$ يعمل على المجموعة S^1 كما يلي:





أي أن ع يقوم بتجميع المركبات المتكافئة في مدار واحد، وهكذا بقية التباديل وبالتالي فإن تباديل D_n ستجزئ المجموعة S^n إلى مدارات، كل مدار فيها يحتوي على المركبات الكيماوية المتكافئة.

نفرض حساب عدد هذه المدارات في هذه الحالة وفي حالات أخرى كثيرة سنحتاج مبرهنة برنسايد التي برهنها سنة ١٩١١ ولكن استخداماتها التطبيقية اكتشفت من قبل بوليا سنة ١٩٣٧.

(١-٣-٢) مبرهنة برنسايد (Burnside's Theorem):

لتكن Z زمرة تباديل على المجموعة X ، $N = |X|$.

لكل تبديل $g \in Z$ نعرف $\text{Fix}(g)$ كما يلي:

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X, gx = x\}.$$

فإن عدد المدارات التي تنجز إلى المجموعة X تحت تأثير Z هو

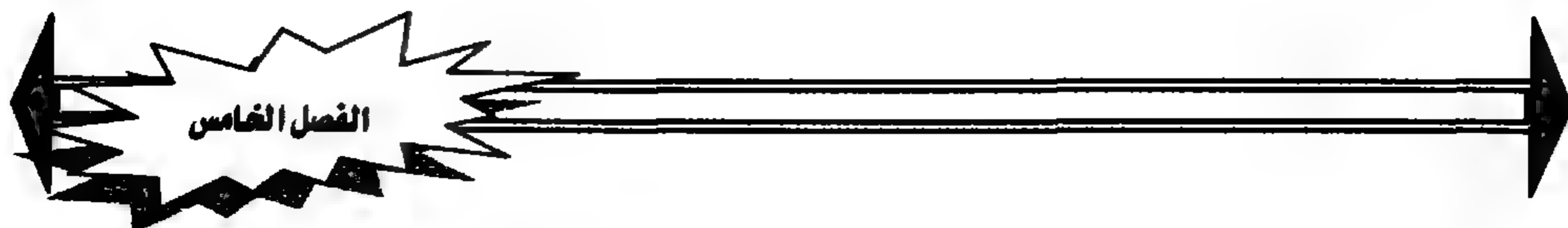
$$N = \frac{1}{|Z|} \sum_{g \in Z} |\text{Fix}(g)|.$$

البرهان: تعد عناصر المجموعة S^n $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in X\}$ ، $x_i = x_j$ ، $x_i \in X$ ، $g \in Z$ بطريقتين مختلفتين.

الجدول في أدناه يبين عناصر X التي تثبت تحت تأثير التبديل $g \in Z$ كما أنه يبين تبديلات Z التي تثبت العنصر $x \in X$ حيث أن:

$$Z = \{1, 2, \dots, n\}, \quad 1 = 1, 2, \dots, n, \dots, n, \dots, n.$$





تمثل أعمدة الجدول بالعناصر من z^* $X \in$ مصفوفة الأفقية بالتبادل $i \in z$ ،
كما أن عناصره الداخلية تمثل بالزوج (z^*, i) وكما يلي:

1^*	2^*	z^*	n^*
1^*			
2^*			
\vdots			
i^*			
n^*			

$Fix(i) = 1.11$

z

حيث أنه إذا كانت $z^* = z'^*$ فإننا نضع 1 في مكان (z^*, i) أما إذا كانت $z^* \neq z'^*$ فإننا نضع 0 في مكان (z^*, i) .

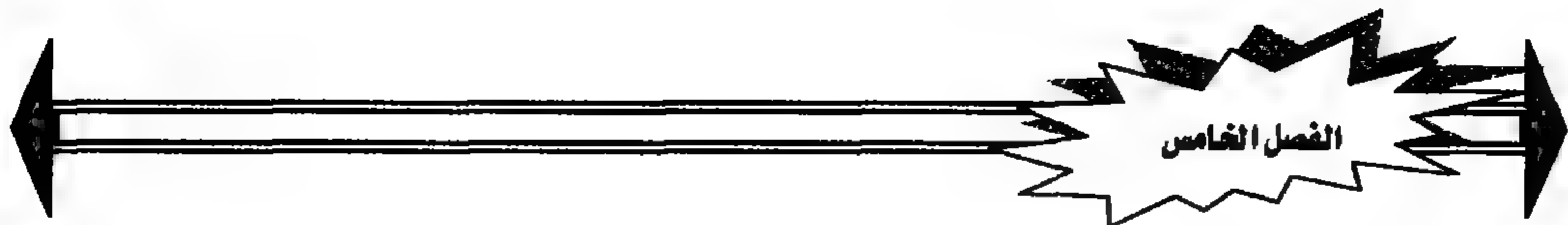
من الواضح أن مجموعة العناصر الداخلية للجدول في أي صف أفقي i مصفوفة يمثل عدد عناصر X التي تثبت تحت تأثير i ، أي أنه $|Fix(i)|$.

كما أنه مجموع العناصر الداخلية للجدول في أي عمود z^* يمثل عدد التباديل التي تثبت z^* أي أنه $|z|$.

يمكن عدد العناصر في المجموعة S^1 إما عن طريق الصفوف الأفقية أو عن

$$|S^1| = \sum_{j \in z} |Fix(j)| = \sum_{i=1}^n |z_i|$$

نختار مجموعة من العناصر من 1^* ، 2^* ،، n^* بحيث يكون كل واحد منها ينتمي إلى مدار من مدارات X تحت تأثير z ، أي يمثل واحد عن كل مدار، ومن الواضح أنه إذا كانت z^* في نفس مدار z^* فإن $z^* = z'^*$



وهذا ينتج بدوره $|z_s| = |z_s|$ لكون $|z_s| = |s^*| = |z_s|$
 $|s^*| = |z_s|$

$$\text{إذا } \sum_{z \in I} \text{Fix}(z) = \sum_{z \in I} \sum_{j=1}^{N_z} z_j = |z_s|$$

$$\text{وهذا يعني أن } \sum_{j=1}^{N_z} |s^*| = |z_s| \cdot N_z = |z_s|$$

$$N_z = \sum_{z \in I} \text{Fix}(z) \cdot \frac{1}{|z|} \neq 0$$

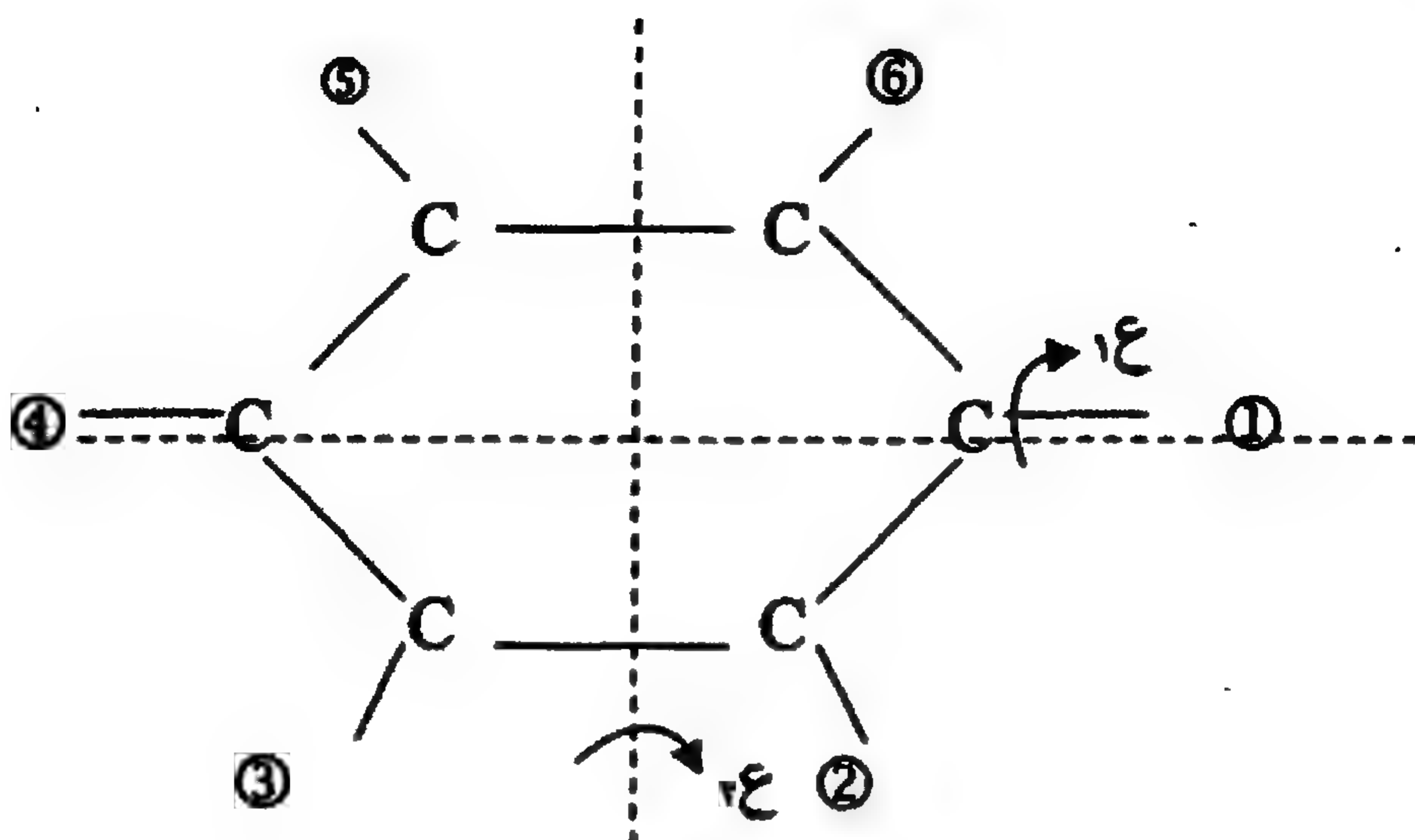
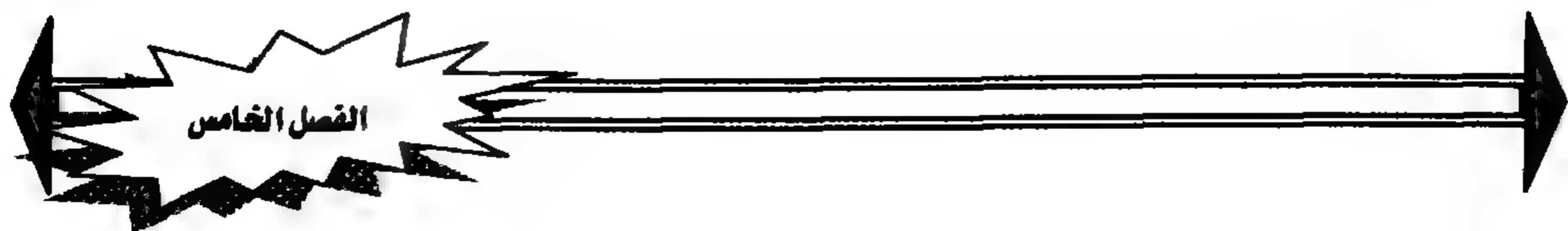
نعود إلى المركبات الكيماوية المتميزة التي تنتج من ارتباط ذرة الهيدروجين H أو جزيء الإيثان CH_3 بحلقة بنزن فنقول بأن عدد احتمالات توزيع H أو CH_3 هو $2^6 = 64$.

ولكن بعض هذه التوزيعات تنتج المركب نفسه إذ أن عدد المركبات الكيماوية المتميزة هو عدد مدارات الزمرة D على المجموعة S^1 التي تمثل المركبات الأربعة والستين الأنفة الذكر.

في زمرة التباديل D نلاحظ أن العنصر المحايد، أي التبدیل $I = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$ يثبت جميع عناصر المجموعة S^1 والبالغ عددها 64.

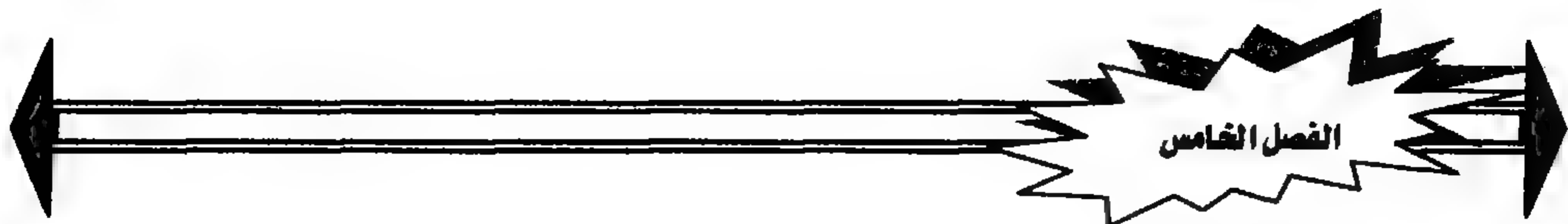
التبدیل $\sigma = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$ الذي يمثل عملية الانعكاس حول المحور المار بالرأسين 1 و 4 هو واحد من ثلاثة تباديل أخرى تمثل عملية الانعكاس حول المحور المار بالرأسين 2 و 5 والمحور المار بالرأسين 3 و 6 إضافة إلى σ . كما أن رتبة هذه التباديل هي 2. انظر الشكل.





ومن الواضح أن ١٤ يثبت الرؤوس ٤ و ١ ويبدل الرأس ٢ بالرأس ٦ كما
 يبدل الرأس ٣ بالرأس ٥ ، هذا يعني أن ١٤ يثبت الشكل في حالة كون محتويات
 الرأسين ٢ و ٣ هي نفس محتويات الرأسين ٦ و ٥ على التوالي. أي أن بإمكاننا
 الاختيار في وضع H أو CH_3 أو ٤ و ٢ و ٣ بينما ما سنضعه في الرأسين ٥ و ٦
 سيعتمد على ما وضعناه في ٢ و ٣ على التوالي. وهذا يعني أن التبديل ١٤ يثبت
 $٢^4 = ١٦$ عنصراً من عناصر المجموعة S^1 ، وبالتالي فإن هناك $١٦ \times ٣ = ٤٨$.
 عنصراً من عناصر S^1 تثبت تحت تأثير التباديل من نوع ١٤ في D_6 .

إن التبديل $٢٤ = (٢ \ ٣) (١ \ ٤) (٥ \ ٦)$ في D_6 الذي يمثل عملية
 الانعكاس حول المحور المار ما بين الرأسين ٢ و ٣ والمركز هو واحد من ثلاثة
 تباديل تمثل عملية الانعكاس حول المحاور المارة ما بين الرأسين ١ ، ٢ والمركز وما



بين الرأسين ٦ و ١ والمركز إضافة إلى ع٢. كما أن رتبة هذا النمط من التباديل هي ٢.

ومن الواضح أن ع٢ يثبت أي عنصر من عناصر S^1 عندما تكون محتويات الرؤوس ٢، ١، ٦ نفس محتويات الرؤوس ٣، ٤، ٥ على التوالي، أي أن بإمكاننا الاختيار مواقع H أو CH_3 فقط في الرؤوس ٢، ١، ٦ إذ أن محتويات الرؤوس ٣، ٤، ٥ ستعتمد على الرؤوس الثلاثة الأولى وعلى التوالي. وهذا يعني أن هناك $2^3 = 8$ من عناصر S^1 تثبت بواسطة التبديل ع٢، أي أن هناك $24 = 8 \times 3$ عنصراً من عناصر S^1 تثبت تحت تأثير التباديل من نوع ع٢ في D_6 .

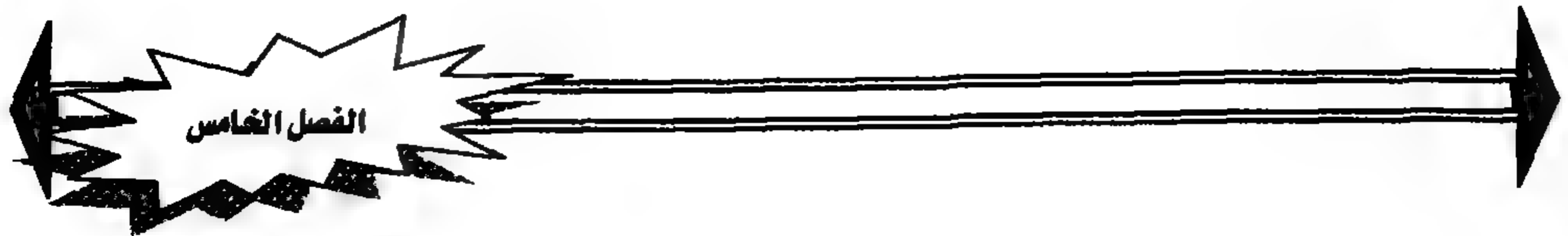
إن تباديل D_6 التي بقيت الآن هي التي تمثل عملية الدوران بزاوية $\pm \frac{\pi}{3}$

مثل

(١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦) وبزاوية $\pm \frac{\pi}{3}$ مثل (١ ٣ ٥ ٢ ٤ ٦) وبزاوية π مثل (١ ٤ ٢ ٥ ٣ ٦).

وإن رتبة كل تبديل من هذه التباديل واضحة كما أن عملية عدد عناصر S^1 التي تثبت تحت تأثير هذه التباديل البسيطة وتترك مناقشة ذلك للطالب حيث ستكون موضحة في الجدول الآتي الذي يعطي معلومات كاملة حول كل تبديل من تباديل D_6 ورتبها وعدد عناصر S^1 التي تثبتها.





العدد الكلي لعناصر S^1 التي تثبت تحت تأثير $r \cdot Fix $	$ Fix $ (ع)	عدد التباديل (ر)	الرتبة	مثال عن كل نوع من أنواع التباديل (ع)
٦٤	٦٤	١	١	(١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦)
٤٨	١٦	٣	٢	(٢ ١) (٣ ٢) (٤ ٣) (٥ ٤) (٦ ٥)
٢٤	٨	٣	٢	(١ ٢) (٣ ٤) (٥ ٦)
٤	٢	٢	٦	(١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦)
٨	٤	٢	٣	(١ ٢ ٣) (٤ ٥ ٦)
٨	٨	١	٢	(١ ٢) (٣ ٤) (٥ ٦)
$156 = \sum_{r \in E} Fix $		$12 = D $		

فإن عدد أنواع المركبات الكيماوية المتميزة هو $N = \frac{156}{12} = 13$

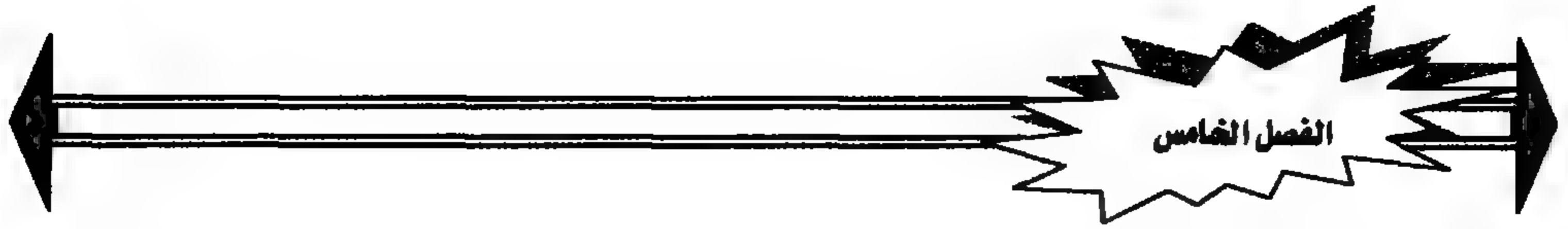
(٢-٣-٢) دوال المفاتيح الكهربائية:

في الكهرباء، عدد الدوائر الكهربائية التي يمكن الحصول عليها من خلال ن
من المفاتيح هو 2^2 هذا العدد يكبر بشكل هائل بازدياد ن فمثلاً عندما $n = 2$
هناك $2^2 = 16$ دائرة كهربائية وعندما $n = 3$ هناك $2^3 = 256$ من الدوائر
الكهربائية.

أما عندما $n = 4$ فإن هناك $2^4 = 65536$ من الدوائر الكهربائية.

ولكن كما في الحالة السابقة، عند التعامل مع المركبات الكيماوية فإن هذه
الدوائر الكهربائية ليست جميعاً متميزة وإن زمرة التباديل التي تعمل على
المفاتيح مستجزي المجموعة S^1 إلى مدارات حيث أن S^1 تمثل مجموعة الدوائر
الكهربائية لـ 2^2 .



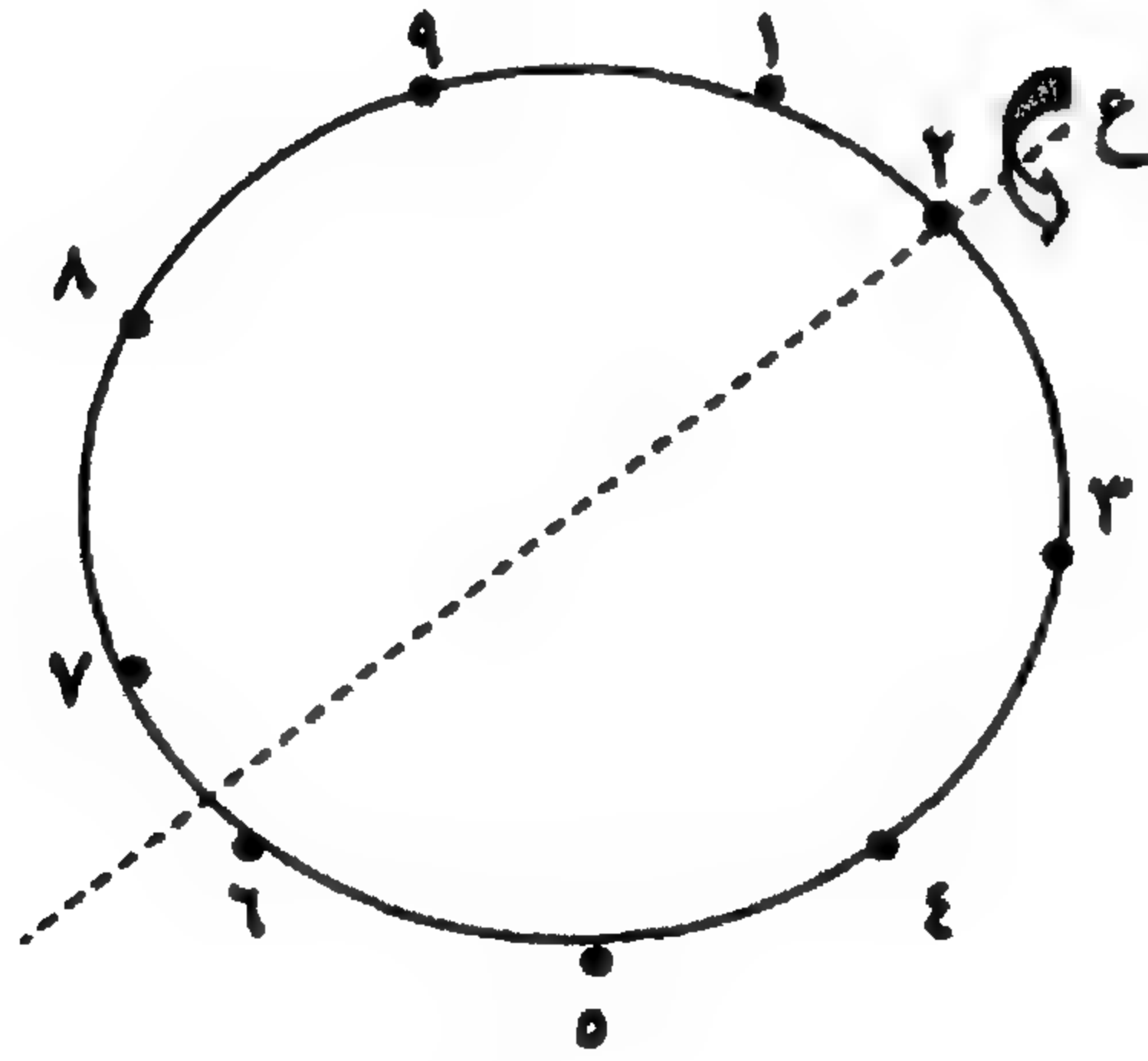


عدد المدارات هو عدد الدوائر لكهربائية التمايزة، وفيما يأتي مثال آخر في تطبيقات مبرهنة برنسايد.

مثال ٢٩: تصنع قلادة من خيط حرير وتسعة أحجار ثمينة لها نفس المواصفات ما عدا اللون حيث أن ثلاثة منها سوداء والستة الباقية بيضاء.

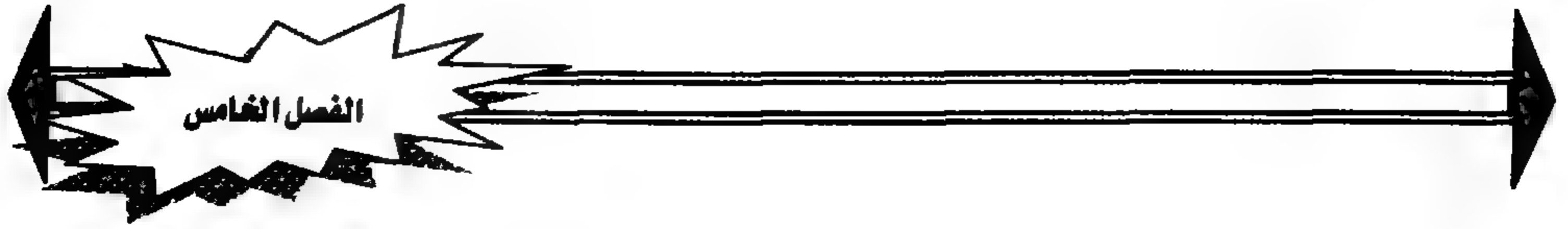
ما عدد الأنواع التمايزة من القلائد التي يمكن صنعها؟ آخذين بنظر الاعتبار أن عملية الدوران والانعكاس لا تغير في نوع القلادة.

الحل: من الواضح أن لدينا شكلاً تساعياً، أي ذا تسعة رؤوس وتسعة أضلاع وأن علينا توزيع الأحجار الثمينة التسعة على هذه الرؤوس كما هو موضح بالشكل.



بما أنه بإمكاننا اختيار ثلاثة من الرؤوس التسعة لتوزيع الأحجار الكريمة السوداء عليها، فإن مجموعة الأشكال المحتملة للقلائد، S^1 ، تحتوي على $84 = \frac{9!}{13!(3-9)} = \binom{9}{3}$ شكلاً والتي ليست بالضرورة متميزة إذ أن زمرة





التباديل D التي تعمل على الرؤوس التسعة مستجزي S^1 إلى مدارات. عدد هذه المدارات هو عدد القلائد المتميزة التي يمكن صنعها.

بديهي أن العنصر المحايد في D أي التبديل $(1)(2)(3) \dots (9)$ يثبت جميع عناصر S^1 أي أنه يثبت ٨٤ عنصراً.

إن التبديل $1ع = (2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)$ الذي يمثل عملية الانعكاس حول المحور المار بالرأس ٢ ومركز القلادة هو واحد من تسعة تباديل تمثل عملية الانعكاس حول المحاور التي تمر بأحد الرؤوس التسعة ومركز القلادة. رتبة كل من هذه التباديل هي ٢.

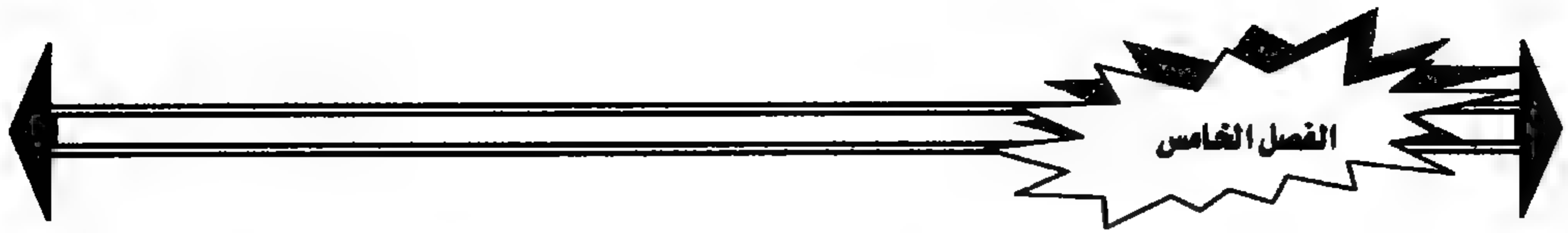
ومن الواضح أن ١ع يثبت شكل القلادة في حالة توزيع الأحجار السوداء في أماكن الرؤوس $\{1, 2, 3\}$ و $\{2, 4, 9\}$ و $\{2, 6, 7\}$ ، $\{2, 5, 8\}$ وذلك لكون ١ع يثبت الرأس ٢ ويبدل الرؤوس ٣، ٤، ٥، ٦ بالرؤوس ١، ٩، ٨، ٧ على التوالي.

هذا يعني أن $Fix(1ع) = 4$

وبما أنه لا توجد سوى تسعة تباديل من هذا النوع، فإن هناك $4 \times 9 = 36$ عنصراً من عناصر S^1 تثبت تحت تأثير التباديل من نوع ١ع في D .

إن التبديل $2ع = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)$ الذي يمثل الدوران بزاوية $\frac{\pi}{3}$ هو أحد تبديلين رتبة كل منهما ٣. الآخر هو $2ع$ الذي





يمثل الدوران بزاوية $\frac{\pi^4}{3}$ ، ومن الواضح أن \mathcal{E}_2 يثبت شكل القلادة في حالة توزيع الأحجار السوداء في أماكن الرؤوس

$\{1, 7, 4\}$ و $\{2, 8, 5\}$ و $\{3, 9, 6\}$. هذا يعني أن

$$3 = |\text{Fix } \mathcal{E}_2|$$

إذاً هناك $2 \times 3 = 6$ من عناصر S^1 تثبت تحت تأثير التباديل من نوع \mathcal{E}_2 في D_9 . التبديل $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9)$ \mathcal{E}_2 رتبته 9 ويمثل الدوران بزاوية 40° هو واحد من ستة تباديل هي \mathcal{E}_2 ، \mathcal{E}_3 ، \mathcal{E}_4 ، \mathcal{E}_5 ، \mathcal{E}_6 ، والتي تثبت عنصراً من عناصر S^1 في حالة كون جميع الأحجار لها نفس اللون. هذا يعني أن $0 = |\text{Fix } \mathcal{E}_2|$

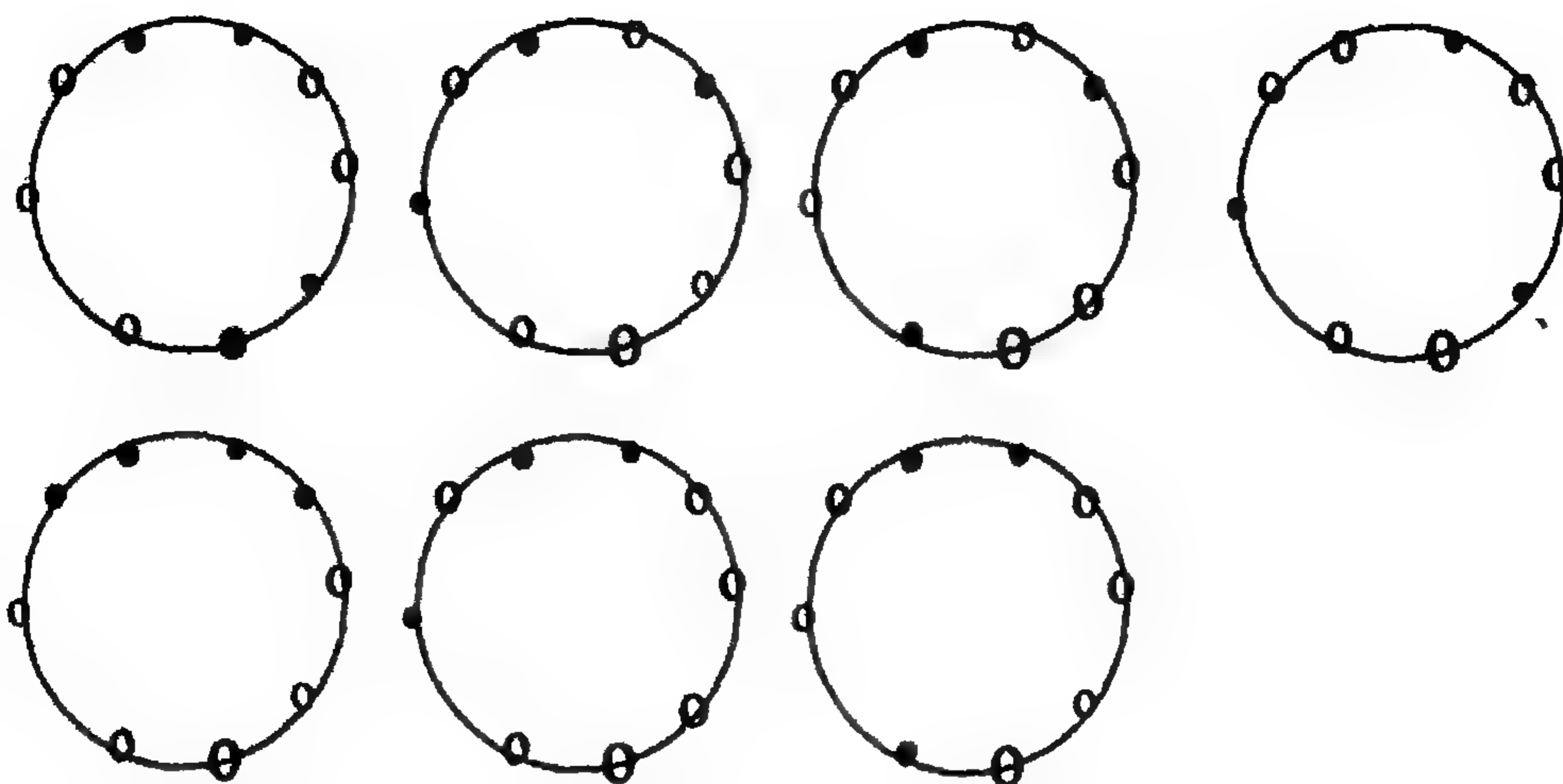
نجعل ما تقدم من معلومات بالجدول التالي:

مثل عن كل نوع من أنواع التباديل (p)	الرتبة	عدد التباديل r	$ \text{Fix}(p) $	$r \cdot \text{Fix}(p) $
(1) (2) (3) (9)	1	1	84	84
(2) (1) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)	2	9	4	36
(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)	3	2	3	6
(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)	9	6	0	0
		$18 = D $		$126 = \sum_{p \in D} \text{Fix}(p) $

إذاً عدد أنواع القلائد المتميزة التي يمكن عملها هو $N = \frac{126}{18} = 7$

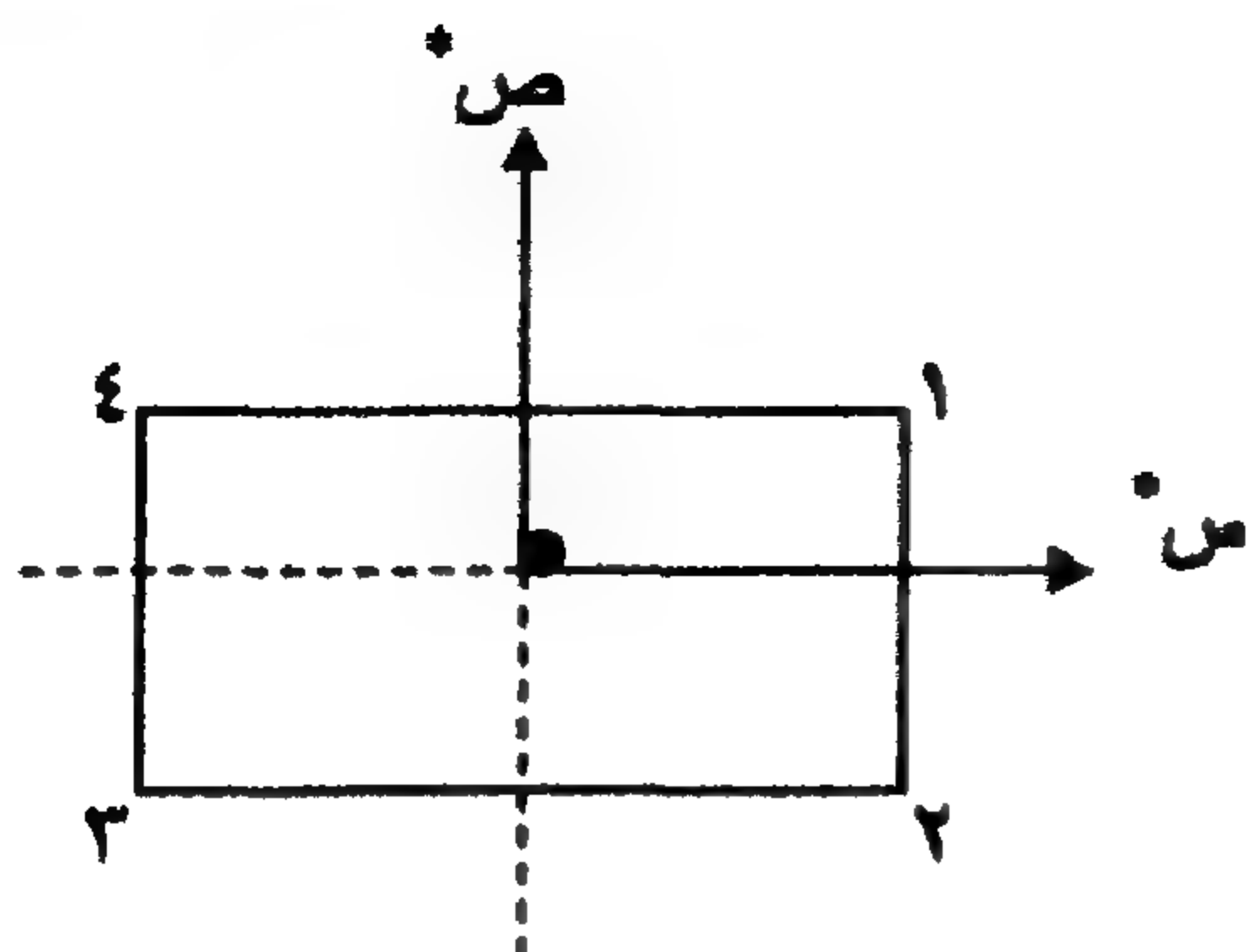
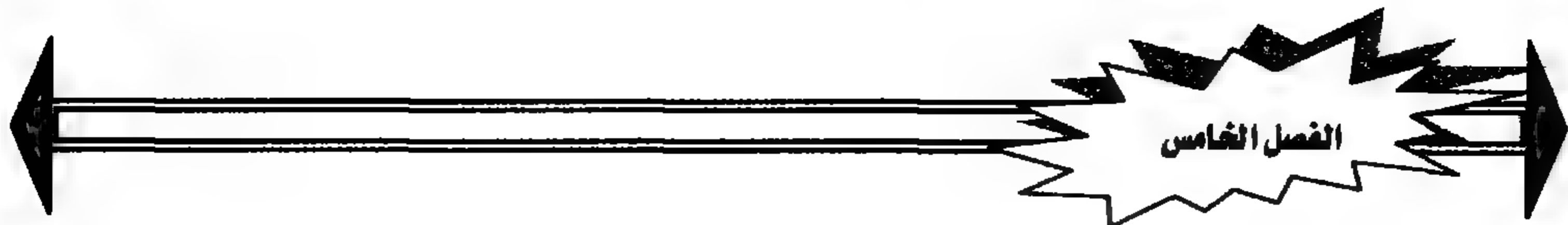
وهي:



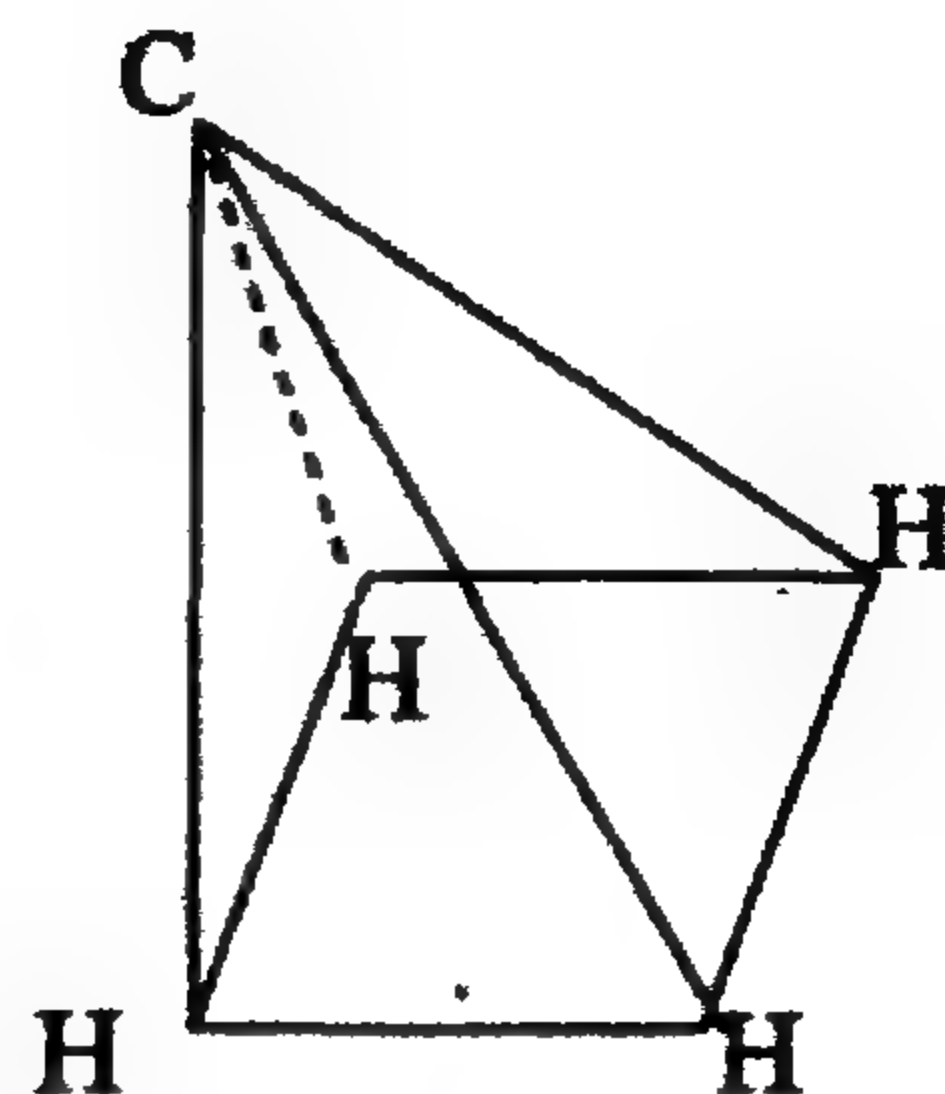


(٢-٣-٣) التذبذب الجزيئي (Molecular vibration) :

لنظرية الزمر استخدامات مهمة في دراسة تذبذب الجزيئات وتحليل الأنماط الطبيعية (Normal Modes) لهذه الجزيئات. في سنة ١٩٥٩ قام العالم ويكنر (Wigner) بتحليل الأنماط الطبيعية لجزيئة الميثان CH_4 . ويمكن استخدام طريقة ويكنر في التحليل لدراسة وتحليل أنه جزيئة من هذا النوع، وأن عملية تذبذب جزيئة الميثان CH_4 في الشكل (١) والموضحة في الشكل (٢) تعرف زمرة رتبها ٨. وتتكون عناصر هذه الزمرة من التباديل التالية:



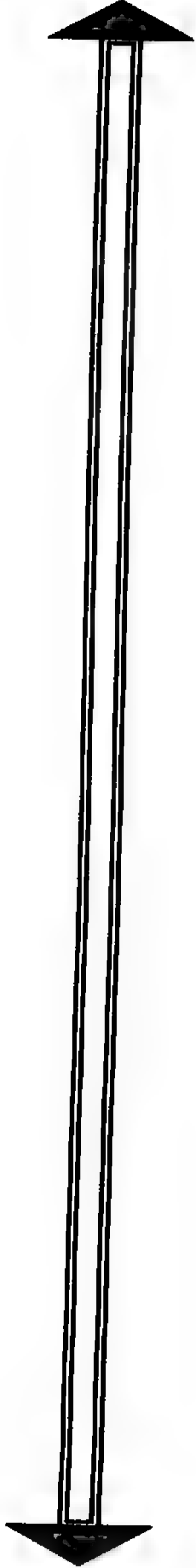
الشكل (٢)



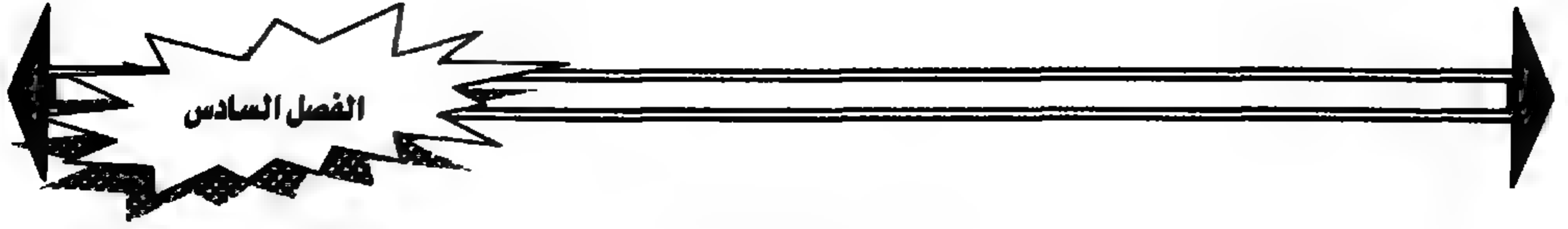
الشكل (١)

العنصر المحايد الذي ثبت كل ذرات الهيدروجين	(١) (٢) (٣) (٤)
عملية الانعكاس حول المحور المار بالرأسين ١، ٣	(١) (٣) (٢) (٤)
عملية الانعكاس حول المحور المار بالرأسين ٢، ٤	(١) (٣) (٢) (٤)
عملية الانعكاس حول المحور س*	(١) (٢) (٣) (٤)
عملية الانعكاس حول المحور ص*	(١) (٤) (٢) (٣)
عملية الدوران بزاوية ٩٠° في المستوى س* ص*	(١) (٢) (٣) (٤)





العلاقات



الفصل السادس

العلاقات

١.٣ حاصل الضرب الكارتيزي (الجداء الديكارتي)

Cartesian product:

تعريف ١-١-٣:

الزوج المرتب (order pair) (س، ص) هو كائن رياضي مكوّن من العنصرين س، ص مأخوذين على الترتيب س ثم ص، يسمى س العنصر الأول أو المركبة الأولى أو المسقط الأول للزوج المرتب، ويسمى ص العنصر الثاني أو المركبة الثانية أو المسقط الثاني للزوج المرتب.

من التعريف السابق نستطيع بسهولة ملاحظة أن: $(س \neq ص) \Leftrightarrow (س، ص) \neq (ص، س)$

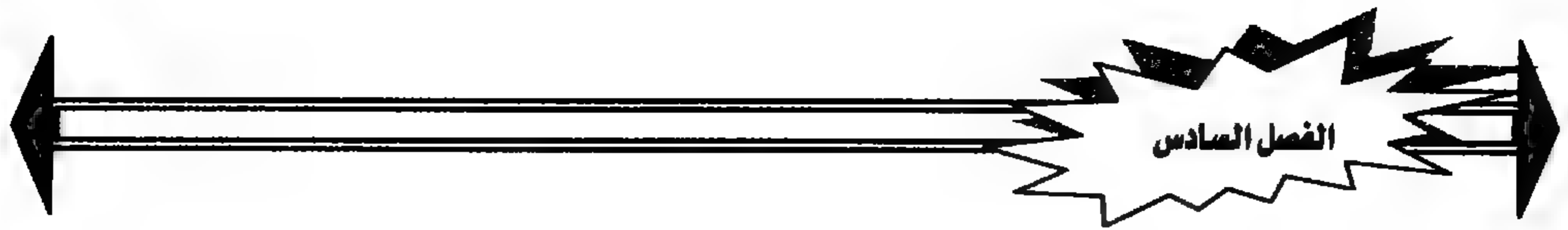
$$(٢) (س١، ص١) = (س٢، ص٢) \Leftrightarrow س١ = س٢ \wedge ص١ = ص٢$$

$$(٣) (س١، ص١) \neq (س٢، ص٢) \Leftrightarrow س١ \neq س٢ \vee ص١ \neq ص٢$$

تعريف ٢-١-٣:

حاصل الضرب الديكارتي أو الجداء الديكارتي للمجموعتين أ و ب والذي نرمز له بالرمز $A \times B$ هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مركبتها الأولى





عنصر في أ والمركبة الثانية عنصر في ب، أي أن:

$$A \times B = \{(s, s) : s \in A \wedge s \in B\}$$

عندما نستعمل مصطلح الجداء الديكارتي فمن المفهوم أن المجموعات المتضمنة غير خالية حتى وإن لم يذكر ذلك صراحة.

مثال ٣-١-١:

$$\text{بفرض أن } A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{(s, s) : s \in A\}$$

$$A \times B = \{(1, s), (2, s), (3, s) : s \in A\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$B \times A = \{(s, 1), (s, 2), (s, 3) : s \in A\} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$$

$(3, 3) \in B \times A$ واضح أن العملية ليست تبديلية حيث $A \times B \neq B \times A$

ملحوظة: إذا كان عدد عناصر المجموعة أ يساوي م، وعدد عناصر المجموعة

ب يساوي ن فإن عدد عناصر المجموعة $A \times B$ يساوي م . ن

يمكن بناء جدول الانتماء للجداء الديكارتي، ولكن يجب أن نفهم أن المقارنة بين المجموعات يجب أن تكون على أساس قيم الانتماء للعنصر نفسه، فمثلاً تطابق قيم الانتماء المتناظرة للمجموعتين $A \times B$ و $B \times A$ لا يعني التساوي حيث إن قيم الانتماء الخاصة بالمجموعة $A \times B$ هي نسبة لانتماء الزوج المرتب (p, b) للمجموعة $A \times B$ من عدمه، أما قيم الانتماء الخاصة بالمجموعة $A \times B$ فهي بالنسبة لانتماء الزوج المرتب (p, b) إلى المجموعة $A \times B$ من عدمه.



ونعلم أن $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq (\mathcal{B}, \mathcal{A})$ عامة وعليه فإن المقارنة مستبعدة لاختلاف عناصر الانتماء، ولتوضيح ذلك نقدم جدول الانتماء الخاص بالجداء الديكارتي $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ، $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$ (أنظر جدول (١)).

جدول (١)

\mathcal{A}	\mathcal{B}	$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \times \mathcal{A}$
١	١	١	١
١	٠	٠	٠
٠	١	٠	٠
٠	٠	٠	٠

ملحوظة:

(١) قيم الانتماء في العمود الأول معتمدة على انتماء العناصر \mathcal{A} إلى المجموعة \mathcal{A} من عدمه، وقيم الانتماء بالعمود الثاني معتمدة على انتماء العنصر \mathcal{B} إلى المجموعة \mathcal{B} من عدمه.

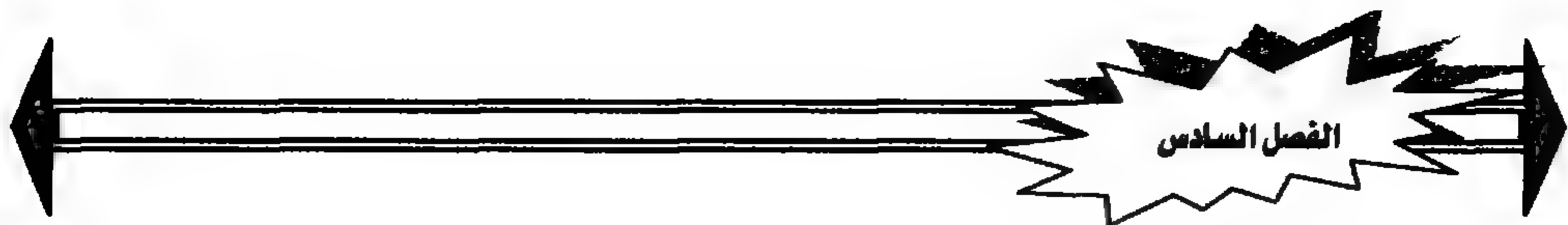
(٢) رغم تطابق قيم الانتماء المتناظرة بالعمودين الأخيرين فإن ذلك لا يعني أن $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \mathcal{B} \times \mathcal{A}$ لاختلاف عناصر الانتماء.

(٢-٣) تمثيل الجداء الديكارتي:

يمكن تمثيل الجداء الديكارتي بثلاثة طرق هي:

(أ) التمثيل الجدولي. (ب) التمثيل السهمي

(ج) التمثيل البياني



وسوف نبين كل طريقة من تلك الطرق من خلال المثال التالي:

مثال ١-٢-٣: مثل الجداء الديكارتي للمجموعة $A \times B$ للمجموعتين A ، B اللتين بالمثال ١-١-٣.

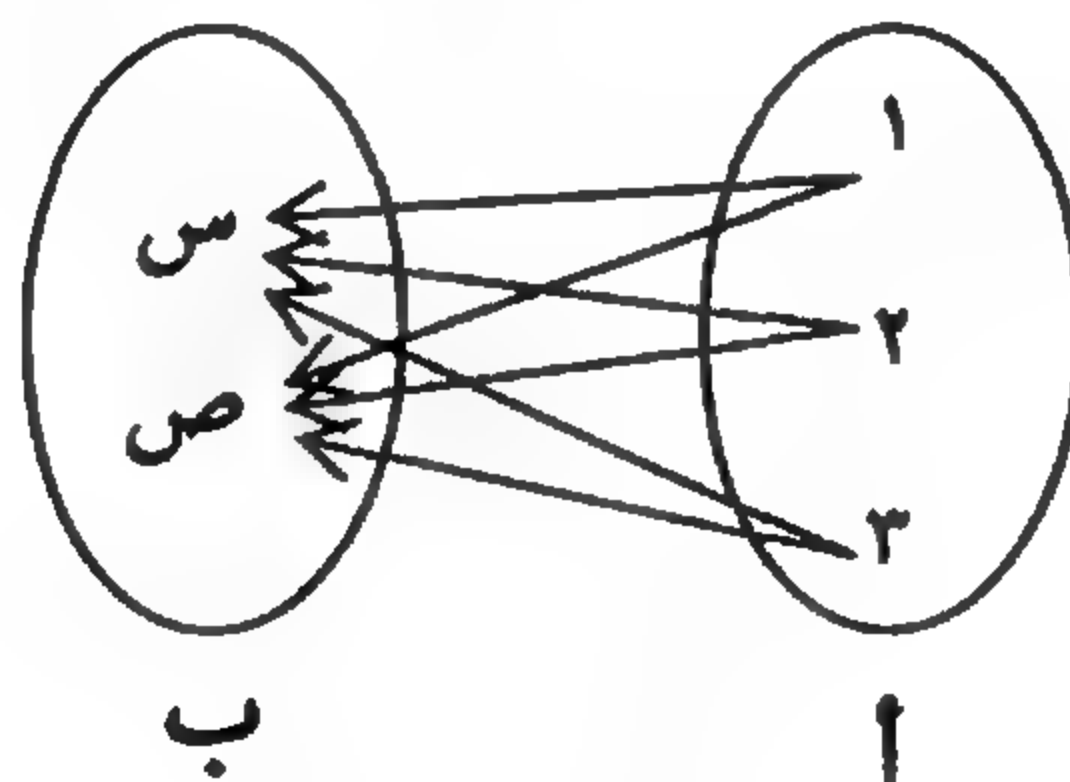
الحل:

(أ) التمثيل الجدولي للجداء الديكارتي $A \times B$ كما هو بالجدول التالي:

جدول (٢)

X	ص	س
١	(١، ص)	(١، س)
٢	(٢، ص)	(٢، س)
٣	(٣، ص)	(٣، س)

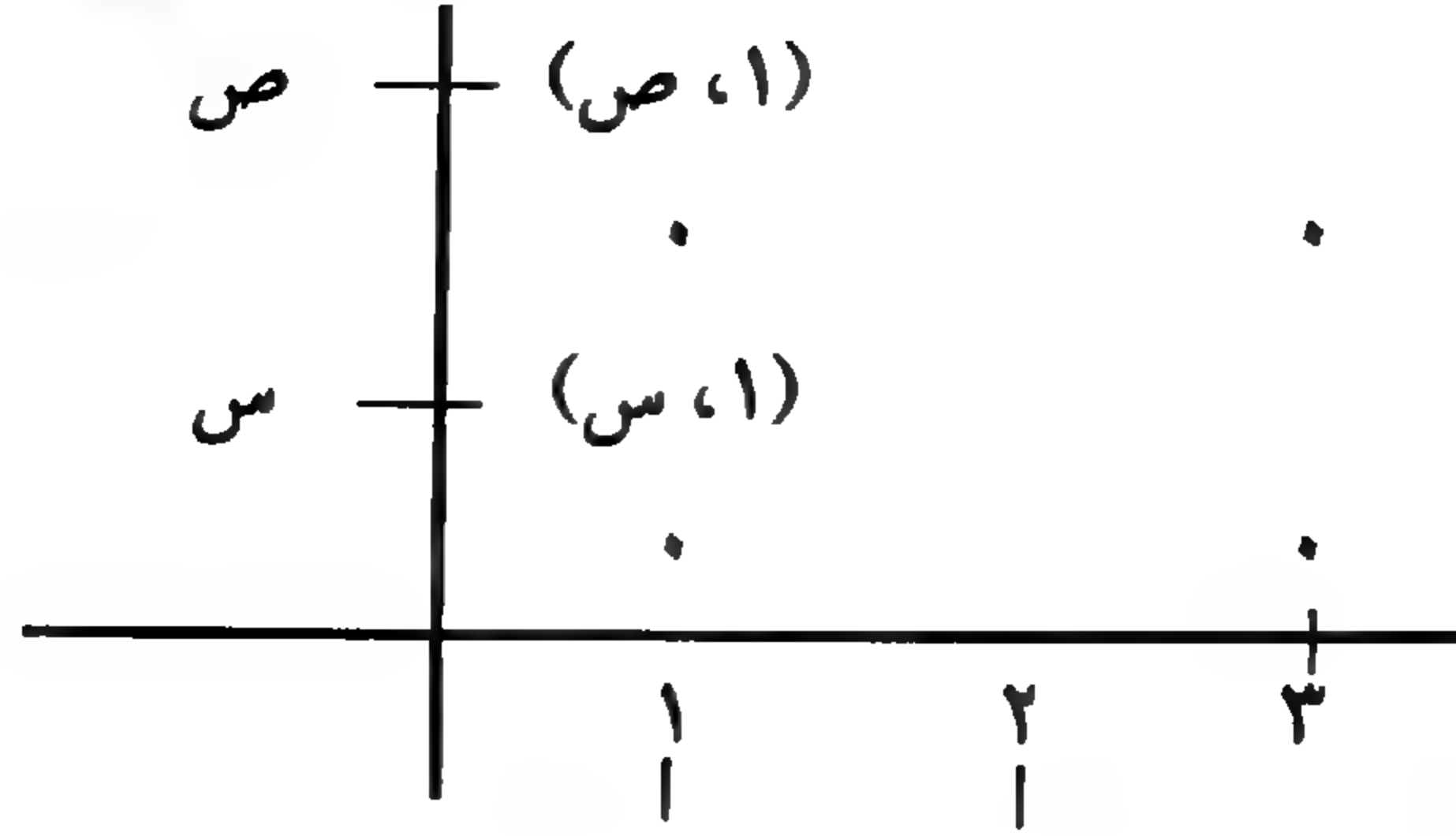
(ب) التمثيل السهمي للجداء الديكارتي $A \times B$ هو عبارة عن أسهم تخرج من كل عنصر من عناصر المجموعة A إلى كل عنصر من عناصر المجموعة B



شكل (١)

(ج) التمثيل البياني للجداء الديكارتي $A \times B$ هو عبارة عن تمثيل العناصر المكوّنة له بنقاط في المستوى الذي محواره الأفقي عناصر A ومحوره الرأس عناصر B (انظر شكل (٢))





نظرية ١-٢-٣: إذا كانت أ، ب، ج مجموعات غير خالية، أثبت أن:

$$(١) \quad \Phi = A \times \Phi = \Phi \times A$$

$$(٢) \quad (A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$$

$$(٣) \quad (A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$$

$$(٤) \quad (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$(٥) \quad (A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$$

البرهان:

(١) لإثبات ذلك نتبع الآتي:

نفرض جـ بدلاً أن $\Phi \neq \Phi \times A$ إذن يوجد زوج مرتب (A, B) بحيث
 $(A, B) \times \Phi \Leftarrow \Phi \times A \Leftarrow \Phi \ni B^*$ وهذا تناقض.

$$\Phi \times A = \Phi \text{ بالمثل } \Phi = A \times \Phi$$

$$(٢) \quad \{ (A, B) : (A, B) \cap (A, C) = A \times (B \cap C) \} = (A \cup B) \times A$$

$$= \{ (A, B) : (A \cap C) \cap (B \cap C) = (A \cap C) \times (B \cap C) \}$$

$$\begin{aligned} & \{(س، ص) : [س \exists أ \wedge ص \exists ب] \vee [س \exists أ \wedge ص \exists ج]\} = \\ & \{(س، ص) : (س، ص) \exists أ \times ب \vee (س، ص) \exists أ \times ج\} = \\ & \cup (أ \times ب) = \{(س، ص) : (س، ص) \exists (أ \times ب) \cup (أ \times ج)\} = \\ & (أ \times ج) \end{aligned}$$

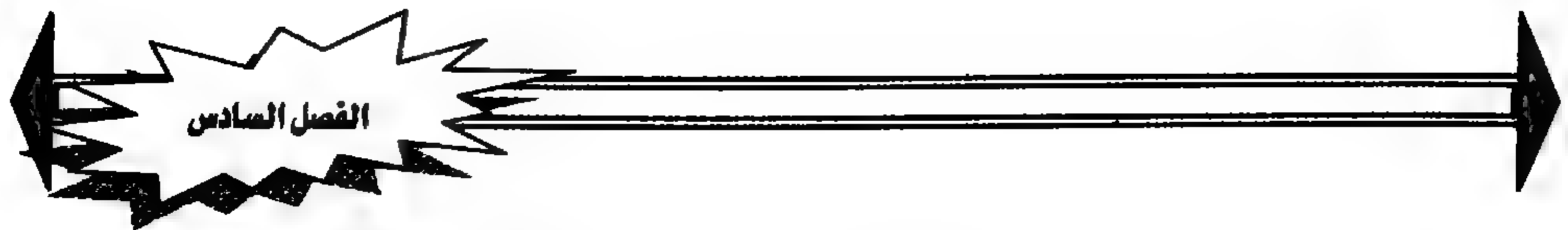
(٣) بالطريقة نفسها يمكن إثبات أن $(ب \cup ج) \times أ = (ب \times أ) \cup (ج \times أ)$
يتضح مما سبق أن عملية \times توزيعية على \cup .

سوف نستخدم جدول الانتماء في إثبات الخاصيتين (٤)، (٥) وذلك بعد اعتبار أن

$$\begin{aligned} & ع = أ \cap ب \quad \zeta = أ \times ب \quad \mu = ج \times أ \quad \tau = أ \times ب \quad \rho = أ \times ج \\ & \alpha = (ب \cap ج) \times أ \quad \beta = (ب \times أ) \cap (ج \times أ) \quad \gamma = أ \times (ب \cap ج) \\ & \delta = (ب \times أ) \cap (ج \times أ) \quad \text{وذلك ما يلي:} \end{aligned}$$

أ	ب	ج	ع	ζ	μ	τ	ρ	α	β	γ	δ
١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	٠	١	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	١	٠	٠	١	٠	١	٠	٠	٠	٠
٠	١	١	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

جدول (٣)



نلاحظ من الجدول ومن تطابق قيم الانتماء المتناظرة بالعمودين الأخيرين
أن $\delta = \gamma$.

$$\text{أي أن } (ب \times ج) \cap (أ \times ج) = (أ \times ج) \cap (ب \times ج)$$

ومن تطابق قيم الانتماء المتناظرة بالعمودين قبل الأخيرين يتضح أن
 $\beta = \alpha$

أي أن $أ \cap (ب \times ج) = (أ \times ج) \cap (ب \times ج)$ وهذا يعني أن \times توزيعية
على \cap .

ويجب ملاحظة أن التطابق تم بالنسبة لانتماء العنصر نفسه بالنسبة
للطرفين. وعلى سبيل المثال فإن $أ \times (ب \cap ج) \neq (ب \cap ج) \times أ$ ، رغم
تطابق قيم الانتماء المتناظرة وذلك لأن قيم الانتماء للطرف الأيسر نسبة لانتماء
العنصر (س، ص) من عدمه، أما قيم الانتماء للطرف الأيمن فهي نسبة لانتماء
العنصر (ص، س) من عدمه.

ملحوظة:

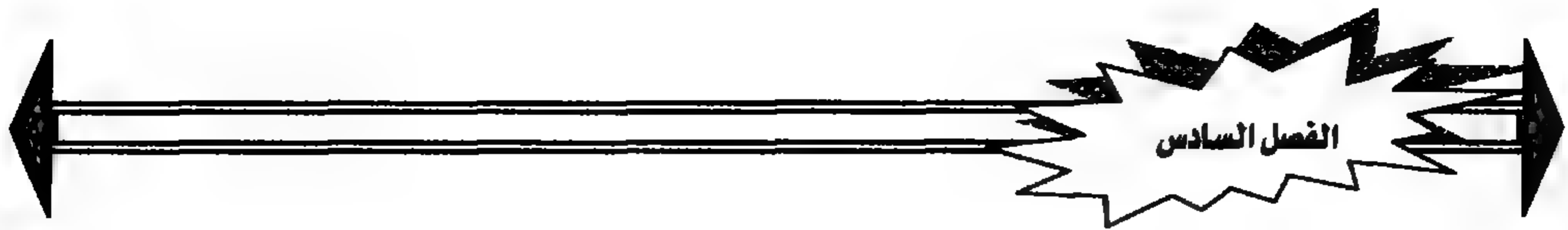
$$(1) \text{ إذا كان } أ = ب \text{ فإن } أ \times ب = ب \times أ = أ \times أ = أ^2$$

(2) إذا كان $أ = ب = ج$ فإن $أ \times ب = ب \times ج = ج \times أ = ج^2$ وهو المستوى
الكارتيزي ويمكن تعميم حاصل ضرب المجموعات على النحو التالي:

إذا كانت $أ_1، أ_2، \dots$ أن مجموعات اختيارية فإن حاصل ضربهما

الديكارتية والذي نرمز له بالرمز $\prod_{i=1}^n أ_i$ يعرف كما يلي:





$$\exists i \forall j \exists p : (p_1, \dots, p_n) = a_1 \times \dots \times a_1 \times a_1 = a_i \prod_{j=1}^n a_j$$

$$\{(1, 2, \dots, n)\}$$

إذا كان $a_i = 1$ لكل $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\forall i \exists p : (p_1, \dots, p_n) = 1 \times \dots \times 1 \times 1 = 1 = a_i$$

$$\exists \{(1, 2, \dots, n)\}$$

٣-٣ العلاقات الثنائية Binary Relations :

تعريف ٣-٣-١ :

يقال إن E علاقة من المجموعة غير الخالية A إلى المجموعة غير الخالية B إذا كانت $E \subseteq A \times B$

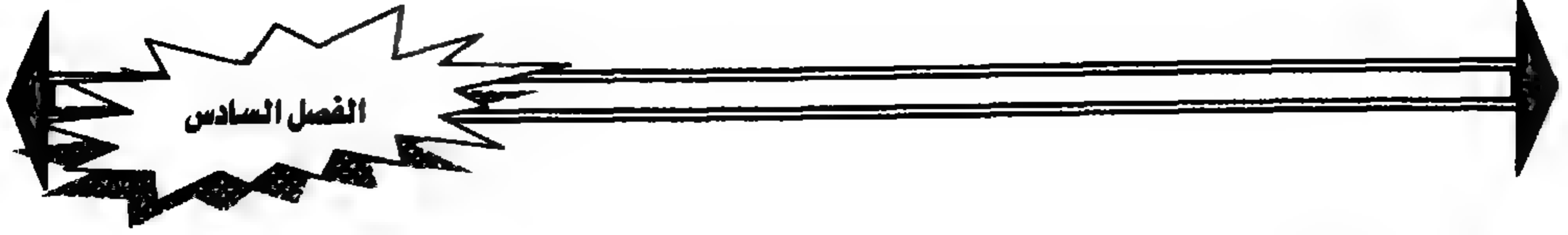
ويقال إن $(A, B, *)$ $\exists E$ أو $A \times B$ إذا ارتبط العنصر A بالعنصر B وفقاً للعلاقة E كما يقال إن $(A, B, *) \exists E$ أو $A \times B$ إذا لم يرتبط العنصر A بالعنصر B وفقاً للعلاقة E ، وكانسحاب طبعي لمفهوم الرتبة على العلاقة، فإن رتبة العلاقة المنتهية هي عدد الأزواج المرتبة التي تكون تلك العلاقة.

مثال ٣-٣-١: بفرض أن $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{4, 5, 6\}$ فإن كلاً من E_1, E_2, E_3 علاقة من A إلى B حيث:

$$E_1 = \{(1, 2), (2, 3)\} = E_2 = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\} = E_3 = A \times B$$

يمكن وصف العلاقة E من المجموعة A إلى المجموعة B سهمياً على أنها أسهم تخرج من بعض عناصر A إلى بعض عناصر B .





تعريف ٣-٣-٢:

بفرض أن ع علاقة من أ إلى ب، فإن مجال أو نطاق (Domain) العلاقة ع والذي يرمز له بالرمز (ع) Dom يعرف كما يلي:

$$\text{Dom (ع)} = \{ \text{أ} \ni \text{أ} : \text{أ} \text{ ع ب}^* \}$$

ويعرف مدى ع (Range) كما يلي :

$$\text{Range (ع)} = \{ \text{ب} \ni \text{ب} : \text{أ} \text{ ع ب}^* \}$$

أي أن مجال (ع) \supseteq أ، مدى (ع) \supseteq ب، إذا كانت $\text{أ} = \text{ب}$ فنقول إن ع علاقة على أ.

ملحوظة: يمكن لعلاقة أن تحتوي على زوج مرتب واحد ويمكن لعلاقة أخرى أن تساوي $\text{أ} \times \text{ب}$ وكلاهما علاقة. إن هذا المفهوم العام للعلاقة يجعلها بعيدة عن أهدافنا، لذلك ستعرض بالدراسة لنوعية من العلاقات تعرف بعلاقة التكافؤ:

تعريف ٣-٣-٣:

إذا كانت ع علاقة على المجموعة غير الخالية أ، فإنه يقال إن ع علاقة:

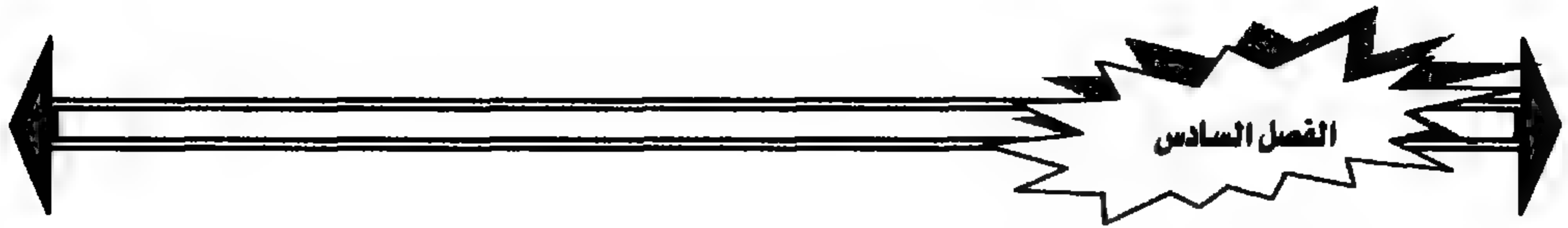
(أ) عاكسة (Reffexine) إذا تحقق الشرط الآتي: $\text{أ} \text{ ع أ} \forall \text{أ} \ni \text{أ}$

(ب) متناظرة أو متماثلة (symmetric) إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\text{إذا } (\text{أ}, \text{ب}) \text{ ع} \implies (\text{ب}, \text{أ}) \text{ ع}$$

(ج) متعدية أو ناقلة (transitive) إذا تحقق الشرط الآتي:





إذا (p, b^*) ، $(b^*, j) \in E \iff (p, j) \in E$

(د) تكافؤ (equivalence relation) على A إذا كانت منعكسة أو متماثلة وناقلة.

مثال ٣-٣-٢:

إذا كانت $A = \{p, b, j\}$. ادرس العلاقات الآتية على A (أي بين ما إذا كانت علاقة تكافؤ من عدمه مع شرح ذلك).

$$E_1 = \{(p, p), (b, b), (j, j)\}.$$

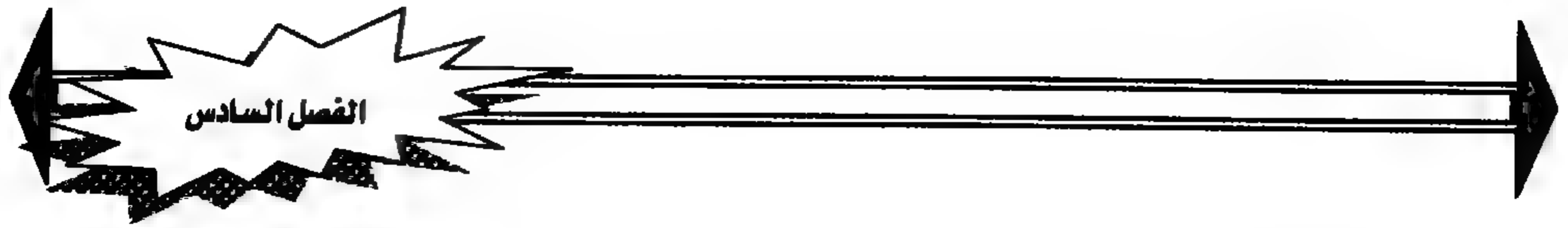
$$E_2 = \{(p, p)\} \quad E_3 = \{(p, b)\}.$$

البرهان:

أولاً: العلاقة E_1 :

- منعكسة، لأن كل عنصر مرتبط مع نفسه.
- متناظرة، لأن عدم التناظر، يتطلب احتواء E على الزوج (p, b) مثلاً في الوقت الذي لا يحتوي فيه على الزوج (b, p) وهذا لم يحدث
- ناقلة، لأن العلاقة غير الناقلة تحتوي على (p, a) ، (a, b) مثلاً ولا تحتوي على (a, j) وهذا لم يحدث، أي ناقلة لعدم وجود ما ينفي ذلك، مما سبق يتضح أن E_1 علاقة تكافؤ وهي أصغر علاقة تكافؤ يمكن تعريفها على A وعدد عناصرها يساوي عدد عناصر A ، أي إذا كانت E علاقة تكافؤ أخرى على A فإن $E_1 \subseteq E$.





ثانياً: العلاقة ع_٢:

- غير منعكسة، حيث يوجد عنصر لم يرتبط مع نفسه وعلى سبيل المثال:

$$ب \not\supseteq أ، (ب، ب) \not\supseteq ع$$

- متعدية، لعدم حدوث عكس ذلك، وعلى هذا يتضح أن ع_٢ غير منعكسة ومتناظرة ومتعدية، أي ليست علاقة تكافؤ كما تحتوي على أقل عدد من الأزواج المرتبة التي تحقق التناظر والتعدي ولا تحقق الانعكاس، أي أن أي علاقة أخرى تحقق الخواص السابقة نفسها فإنها ستحتوي على عدد من العناصر أكبر من أو يساوي عدد عناصر ع_٢، وعلى هذا فإن ع_٢ هي العلاقة التي تحقق الخواص السابقة بأقل رتبة.

ثالثاً: العلاقة ع_٣:

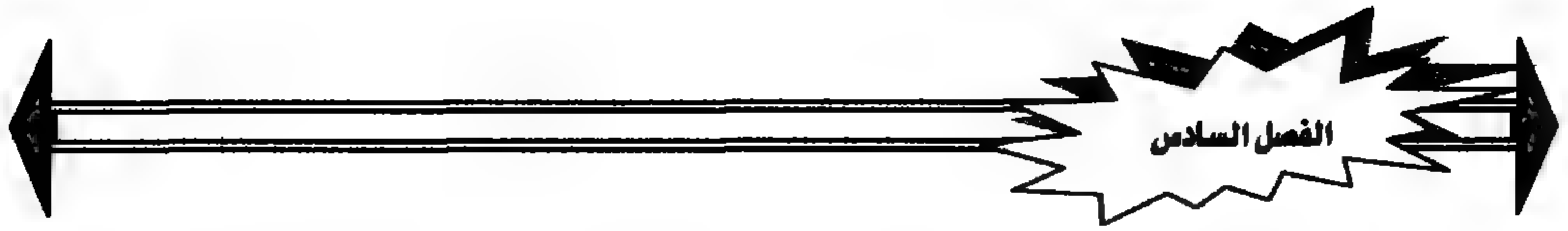
- غير منعكسة لأن $(أ، أ) \not\supseteq ع٣$.

- غير متناظرة لأن $(أ، ب) \supseteq ع٣$ ، $(ب، أ) \not\supseteq ع٣$.

- العلاقة ع_٣ متعدية، مما سبق يتضح أن ع_٣ ليست علاقة تكافؤ بل هي غير منعكسة وغير متناظرة وفقط متعدية، وتحتوي على أصغر عدد من الأزواج المرتبة، أي أن العلاقة غير منعكسة وغير متناظرة ومتعدية بأقل رتبة.

مثال ٣-٣-٣: إذا كانت $أ = \{أ، ب، ج، د\}$ عرف علاقة تكافؤ ع على أ بأقل رتبة، على أن تحتوي على الزوجين المرتبين $(أ، ب)$ ، $(ب، د)$ ضمن عناصرها.





الحل: حتى تكون ع منعكسة فلا بد من احتوائها على الأزواج المرتبة الآتية:

$(١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (٣, ٣)$

حتى تكون ع متناظرة فلا بد من احتوائها على الزوجين المرتبين الآتين:

$(١, ٢), (٢, ١)$.

- حتى تكون ع متعدية يجب أن تحتوي على $(١, ١), (٢, ٢), (٣, ٣)$ وبعد

الاطمئنان على تحقق خاصية التناظر نجد أن ع ستكون كما يلي: ع =

$\{(١, ١), (١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (٣, ٣)\}$

$\{(١, ٢), (٢, ١), (٢, ٢), (٣, ٣)\}$.

تعريف ٣-٣-٤: إذا كانت ع علاقة متناظرة ومتعدية على أ وأن

$\forall ١, ٢ \in A, ١ \neq ٢ \implies (١, ٢) \in E \iff (٢, ١) \in E$ فإن ع علاقة تكافؤ، أي

عاكسة وذلك لأن $\forall ١, ٢ \in A, ١ \neq ٢ \implies (١, ٢) \in E \implies (٢, ١) \in E$ ولكن ع متعدية،

$\forall (١, ٢) \in E, (٢, ٣) \in E \implies (١, ٣) \in E$.

ع منعكسة وبالتالي هي علاقة تكافؤ.

مثال ٣-٣-٤: نفرض أن أ هي مجموعة كل المستقيمات في المستوى، وأن

$١, ٢$ علاقتان على أ معرفتان كما يلي: ع_١ = $\{(١, ٢) : (٢, ١) \in E\}$ ، ع_٢ =

$\{(١, ٢) : ١ \perp ٢\}$.

ع_٢ = $\{(١, ٢) : ١ \in B, ٢ \in A, ١ \perp ٢\}$ ، ادرس العلاقتين ع_١، ع_٢.

الحل: ع_١ منعكسة على اعتبار أن أي مستقيم مواز لنفسه

- ع_١ متناظرة لأن عملية التوازي تبديلية.



- ١٤ متعدية حيث إن عملية التوازي متعدية.

ن ١٤ علاقة تكافؤ.

- ٢٤ ليست عاكسة، لأن المستقيم لا يمكن أن يكون عمودياً على نفسه.

- ٢٤ متناظرة، لأن عملية التعامد إبدالية.

- ٢٤ غير متعدية حيث في المستوى إذا $\perp \perp$ ب، ب \perp ج $\Leftarrow \perp \perp$ ج.

مثال ٣-٣-٥:

بفرض أن X مجموعة غير خالية، ونع، ١٤، ٢٤ علاقتان على $P(X)$ معرفتان كما يلي:

١٤ ب $\Leftrightarrow \perp \cap \perp \neq \emptyset$ ، أ، ب $\ni (x) \perp$.

٢٤ ب $\Leftrightarrow \perp - \perp = \emptyset$ ، أ، ب $\ni (x) \perp$.

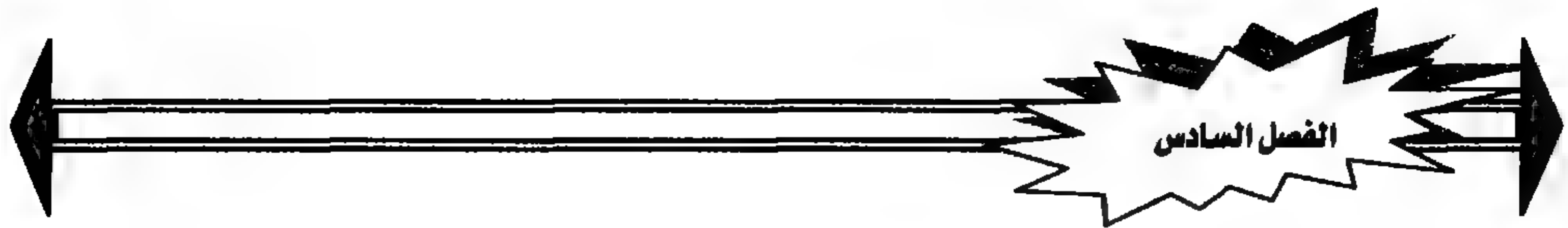
ادرس العلاقتين ١٤، ٢٤.

الحل:

أولاً: بالنسبة للعلاقة ١٤،

- هذه العلاقة غير منعكسة، لأن $\perp \ni (x) \perp$ ، $\perp = \perp \cap \perp \Leftarrow$

$(\perp, \perp) \notin \perp$.



- هذه العلاقة متناظرة، وذلك لأن $a \in A \iff a \in B \cap A \neq \Phi$ $\iff a \in B$
 $a \in B \iff a \in A \cap B \neq \Phi$

هذه العلاقة غير متعدية عامة كما سيتضح من المثال التالي:

مثال ٣-٣-٦:

نفرض أن $A = \{1, 2\}$ $B = \{2, 3\}$ $C = \{3, 4\}$ مجموعات جزئية من المجموعة $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ من الواضح أن $a \in A, b \in B$ لأن $A \cap B = \{2\} \neq \Phi$.

$a \in A$ — لأن $B \cap C = \{3\} \neq \Phi$ لكن $(a, b) \in C$ لأن $A \cap C = \Phi$

ن $a \in A$ ليست علاقة تكافؤ على $P(X)$.

ثانياً: بالنسبة للعلاقة \sim :

- هذه العلاقة منعكسة، لأن $a \in A \iff a \in A - a \in A \iff a \in A \iff a \in A$

- هذه العلاقة غير متناظرة، لأن $a \in A, b \in B$: $a \in A \iff a \in B$ ، $a \neq b$

$a \in A - b \in B \iff a \in A \iff a \in B$ بينما $(a, b) \in C$ لأن $A - B = \Phi$.

- هذه العلاقة متعدية، لأن

إذا $a \in A, b \in B$ $a \in A - b \in B \iff a \in A \iff a \in B$ ، $a \neq b$ $\implies a \in A - b \in B \iff a \in A \iff a \in B$

$a \in A, b \in B$ $a \in A - b \in B \iff a \in A \iff a \in B$ ، $a \neq b$ $\implies a \in A - b \in B \iff a \in A \iff a \in B$

$a \in A$ ليست علاقة تكافؤ على $P(X)$.



٣-٤ فصول التكافؤ Equivalence Classes :

تعريف ٣-٤-١ :

إذا كانت E علاقة تكافؤ على المجموعة A ، $a \in A$ فإن فصل التكافؤ للعنصر a والذي يرمز له بالرمز $[a]$ هو كل العناصر في المجموعة A التي ترتبط بالعنصر a وفقا للعلاقة E ، أي ان $[a] = \{b \in A : a \sim b\}$.

مثال ٣-٤-١ :

نفرض أن $A = \{a, b, c, d, e\}$ وأن E علاقة على A معرفة كما يلي:
 $E = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (d, e), (e, d)\}$
 واضح أن E علاقة تكافؤ على A وأن

$$[a] = \{a, b\}$$

$$[b] = \{b\}$$

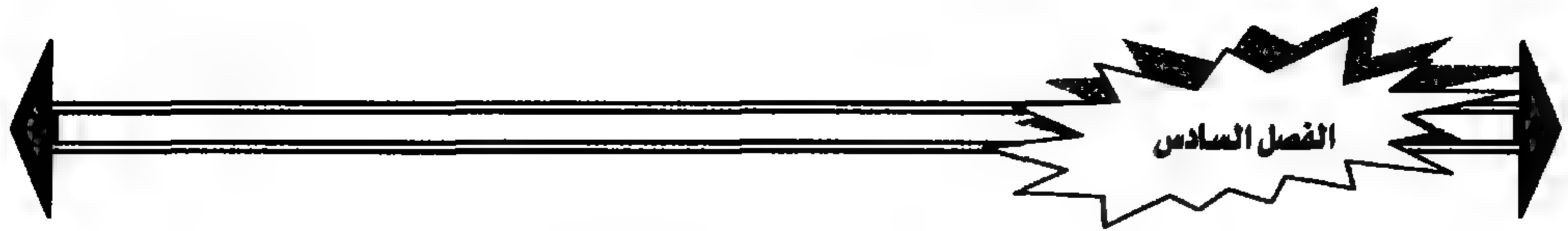
$$[c] = \{a, b, c\} = [a]$$

$$[d] = \{d, e\} = [e]$$

نلاحظ من المثال السابق أن فصل التكافؤ لأي عنصر هو مجموعة غير خالية، كما أن فصول التكافؤ غير متقاطعة وإلا فهي متطابقة، أي متساوية، كما يلاحظ أن اتحاد كل فصول التكافؤ يعطي المجموعة A .

نظرية ٣-٤-١ :

بفرض أن E علاقة تكافؤ على المجموعة A ، إذن $a \in A$ \forall $a \in A$ ، $[a] \neq \emptyset$



$$(2) \forall P, B \ni A \iff \Phi = [B] \cap [P] \text{ أو } [B] = [P]$$

$$(3) A = \{ [P] : P \ni A \}.$$

البرهان:

(1) حيث ع علاقة تكافؤ، إذن $P \in P$ لكل $A \in A$ ، وهذا يؤدي إلى $[P] \in P$ وعليه فإن $[P] \neq \Phi$. (2) نفرض العكس أي $\Phi \neq [B] \cap [P]$ ويلزم إثبات أن $[B] = [P]$

$$ن \iff \Phi \neq [B] \cap [P] \iff E \ni [B] \cap [P] \iff [B] \ni [P]$$

$$\wedge [B] \ni [P] \iff [B] \ni [P] \wedge [P] \ni [B].$$

وبموجب أن ع علاقة تكافؤ، إذن ع متناظرة ومتعدية أي أن $P \in P$ ، $P \in P$ ، $B \in P$ ، $B \in P$ ،

$$B \in P, P \in B, B \in P. \text{ لنفرض } [P] \in [P] \iff [P] \in [P].$$

وحيث أن $P \in B$ والعلاقة ع متعدية، ن $P \in P \wedge P \in B \iff [P] \in [B]$

$$(1) [P] \supseteq [B]$$

لنفرض $[B] \in [P] \iff [B] \in [P]$ وحيث أن $B \in P$ والعلاقة متعدية

$$[P] \in [P] \iff [P] \in [P] \iff [P] \in [P].$$

$$[P] \supseteq [B] \dots \dots \dots (2)$$

من (1) و (2) نحصل على أن $[B] = [P]$.



(٣) البرهان يتم على النحو التالي:

$$f \subseteq \{f \in P, [P]\} \cup \bigcap f \in P \forall f \subseteq [P] \quad (1)$$

لنفرض $\{A \supset B : [A]\} \cup \{[A] \in B\} \supseteq A \iff A \supset B$
 (٢)..... $\{A \supset B$

من (١) و(٢) نحصل على أن $A = \{ [1] : 1 \in A \} \cup \{ 1 \}$ أي أن فصول التكافؤ عبارة عن تجزئة للمجموعة X .

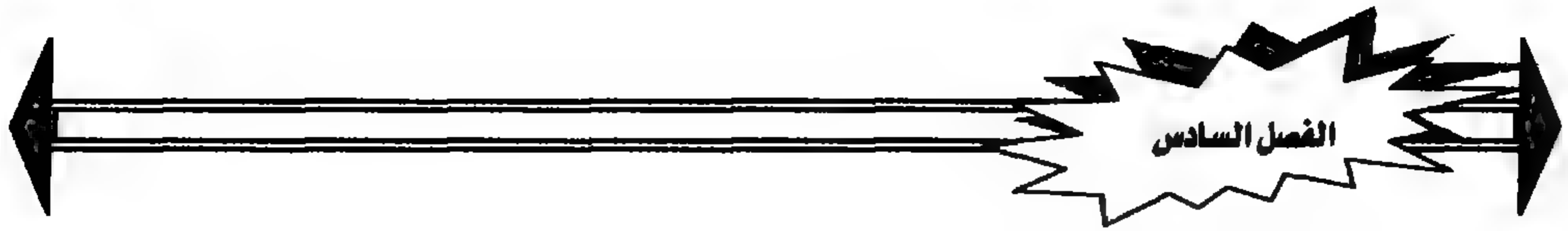
مثال ٣-٤-٢: بفرض أن E علاقة تكافؤ على X ، التي تحتوي على n عنصر، وكان أحد فصول التكافؤ لتلك العلاقة يحتوي على m عنصر، فما هو أكبر عدد ممكن لفصول التكافؤ لتلك العلاقة؟

الحل: وجود فصل تكافؤ يحتوي على m عنصر، يعني بالطبع أن m من عناصر X مرتبطة ببعضها البعض، يتبقى من عناصر X عدداً يساوي $n - m$ ، وللحصول على أكبر عدد من فصول التكافؤ يستلزم أن يرتبط كل عنصر من تلك العناصر مع نفسه فقط وبذلك نحصل $n - m$ فصل تكافؤ، أي أن مجموع أكبر عدد من فصول التكافؤ هو $n - m + 1$ فصل تكافؤ.

مثال ٣-٤-٣: بفرض أن $X = \{أ، ب، ج د، هـ\}$ ، عرّف علاقة تكافؤ على X ، شريطة أن تحتوي على الزوجين المرتبين $(أ، ب)$ ، $(ب، د)$ وذات أقل رتبة ممكنة، ثم أوجد فصول التكافؤ.

الحل:

- حتى تكون ع علاقة تكافؤ فلا بد من احتوائها على الأزواج المرتبة التالية:



$(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}), (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}), (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), (\mathfrak{d}, \mathfrak{d}), (\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$.

- حتى تكون ع متناظرة فلا بد من احتوائها على الزوجين المرتبين $(\mathfrak{p}, \mathfrak{b}), (\mathfrak{d}, \mathfrak{b})$ وذلك لأنها تحتوي على $(\mathfrak{p}, \mathfrak{b}), (\mathfrak{b}, \mathfrak{d})$.

- حتى تكون ع متعدية فلا بد من احتوائها على الزوجين $(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}), (\mathfrak{p}, \mathfrak{b}), (\mathfrak{d}, \mathfrak{b})$.
 $\therefore \text{ع} = \{(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}), (\mathfrak{b}, \mathfrak{b}), (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), (\mathfrak{d}, \mathfrak{d}), (\mathfrak{h}, \mathfrak{h}), (\mathfrak{p}, \mathfrak{b}), (\mathfrak{b}, \mathfrak{d}), (\mathfrak{p}, \mathfrak{d}), (\mathfrak{b}, \mathfrak{p}), (\mathfrak{d}, \mathfrak{p}), (\mathfrak{b}, \mathfrak{d})\}$

$\{(\mathfrak{p}, \mathfrak{d}), (\mathfrak{d}, \mathfrak{p}), (\mathfrak{p}, \mathfrak{b}), (\mathfrak{b}, \mathfrak{p})\}$.

وأن فصول التكافؤ هي كما يلي:

$$[\mathfrak{p}] = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{b}, \mathfrak{d}\} = [\mathfrak{b}] = [\mathfrak{d}].$$

$$[\mathfrak{g}] = \{\mathfrak{g}\}, [\mathfrak{h}] = \{\mathfrak{h}\}$$

مثال ٣-٤-٤:

بفرض أن $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ علاقتا تكافؤ على X التي تحتوي على n عنصر، وكان للعلاقة \mathfrak{E}_1 عدد n من فصول التكافؤ، وكان للعلاقة \mathfrak{E}_2 فصل التكافؤ واحد، صف كلاً من $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$.

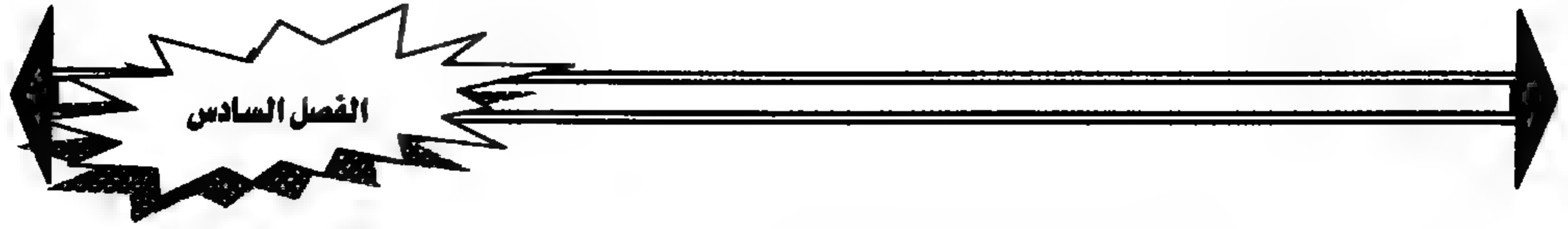
الحل: نفرض أن $X = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n\}$

أولاً: فصول تكافؤ العلاقة \mathfrak{E}_1 عددها n وهي تحقق الآتي:

(١) اتحادها يعطي المجموعة X .

(٢) تقاطع أي فصلين مختلفين يساوي Φ وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت





$$ع_1 = \{(1,1), (2,2), \dots, (n,n)\}$$

ثانياً: علاقة التكافؤ $ع_2$ لها فصل تكافؤ واحد، وهذا يعني أن \times هي ذلك الفصل ولا يتأتى هذا إلا إذا كانت $ع_2 = \times \times \times$.

مثال ٣-٤-٥:

بفرض أن $ع_1, ع_2$ علاقتان على المجموعة $X \neq \Phi$ ، ناقش صحة العبارة:

$$ع_1, ع_2 \text{ علاقتان ناقلتان} \Leftrightarrow ع_1 \cap ع_2 \text{ علاقة ناقلة.}$$

الحل: العلاقتان $ع_1 = \{(1,1), (2,2)\}$ و $ع_2 = \{(1,2), (2,1)\}$ علاقتان ناقلتان على المجموعة $X = \{1, 2\}$ بينما $ع_1 \cup ع_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ علاقة غير ناقلة وعلى ذلك فإن العبارة خطأ في الاتجاه \Leftarrow من ناحية أخرى إذا كان $ع_1, ع_2$ علاقتين على المجموعة X بحيث أن

$$ع_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

$ع_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ فإن $ع_1 \cup ع_2$ علاقة ناقلة إلا أن كلا من $ع_1, ع_2$ علاقة غير ناقلة، إذن العبارة أيضاً خطأ في الاتجاه \Rightarrow .

مثال ٣-٤-٦:

إذا كانت $ع$ علاقة على $ص$ معرفة كما يلي:

$$ع = \{(ص, ص) : ص \in ص^*, ص + ص = \text{عدد زوجي}\}.$$

ادرس العلاقة $ع$ ، ثم أوجد فصول التكافؤ في حالة ما إذا كانت علاقة تكافؤ.



- العلاقة ع منعكسة، لأن $\forall s \ni s \Leftarrow [s + s = \text{عدد زوجي}]$

- العلاقة متناظرة لأن عملية الجمع إبدالية، أي $s + v^* = \text{عدد زوجي}$

$\Leftarrow v^* + s = \text{عدد زوجي}$

$$\therefore \text{س ع ص}^* \iff \text{ص}^* \text{ع س} \forall \text{س، ص}^* \in \text{ص}.$$

- العلاقة ع متعدية كما يتضح على النحو الآتي: لنفرض س ع ص*، ص* ع ص إذا كانت فردية فهذا يحتم أن تكون ص* فردية، لأن س ع ص* وطالما ص* فردية فهذا يحتم أن تكون ص فردية، لأن ص ع ص* وعلى ذلك يكون س + ص عدداً زوجياً.

أما فصول التكافؤ فهي:

$$\{\dots\dots\dots, \{\pm, \pm, 0\} = \{\text{عدد زوجی} = 0 + \text{س} : \text{ص} \ni \text{س}\} = [0]$$

$$\{....., 5\pm, 3\pm, 1\} = \{س : ص = 1 + عدد فردی\} = [1]$$

(٣-٥) التجزئ Partition :

تعريف ٣-٥-١ :

العائلة $\alpha = \{ \alpha_i \}$ والمكونة من مجموعات جزئية غير خالية من المجموعة X
 يقال إنها تجزئة للمجموعة X إذا تحقق الشرطان الآتيان:

(١) $\forall a, a \in A, a \neq a \iff a \cap A = \Phi$. أي منفصلة مثنى مثنى

$$(2) A \cup X = X$$

ومن السهل ملاحظة الآتي:

$$A \cup X = X \iff \forall s \in X, s \in A \iff s \in A$$

مثال ٣-٥-١:

إذا كانت X مجموعة غير خالية، وأن A مجموعة جزئية فعلية من X إذن $A = X, \Phi = \bar{A} \cap A, \Phi \neq \bar{A}, \Phi \neq A$ لأن $\bar{A} \cup A = X$.

لاحظ أن $\{A, \bar{A}\}$ تنتج علاقة تكافؤ X ، يمكن تعريفها كالتالي:

$$A \sim B \iff A \subseteq B \vee B \subseteq \bar{A}, \forall A, B \subseteq X$$

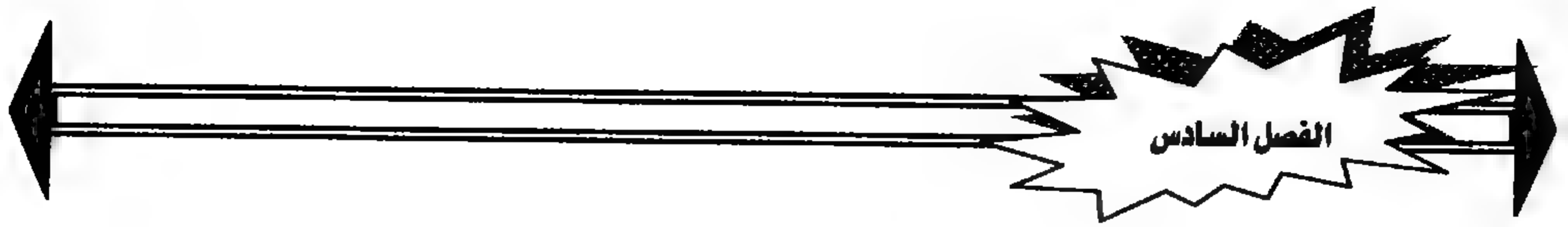
وتسمى علاقة التكافؤ المصاحبة للتجزئة A

مثال ٣-٥-٢:

إذا كانت $B = \{A, B, C\}$ فإن $A = \{\{A\}, \{B, C\}\}$ تجزئة للمجموعة B ، نلاحظ أن A تنتج علاقة تكافؤ على المجموعة B حيث $E = \{(A, A), (B, B), (C, C), (B, A), (A, B), (C, B), (B, C)\}$.

ملحوظة:

يتضح من نظرية (٣-٤-١) أنه إذا كانت E علاقة تكافؤ على المجموعة غير الخالية X فإن عائلة فصول التكافؤ تجزئة للمجموعة X .



نظرية ٣-٥-١:

أي تجزئة للمجموعة غير الخالية X تعرف عليها علاقة تكافؤ وتكون أعضاء التجزئ هي فصول التكافؤ.

البرهان:

نفرض أن $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ تجزئة للمجموعة X ، ونفرض أن E علاقة على X معرفة كما يلي:

$$a \in B \Leftrightarrow a \in E \Rightarrow a = b, \quad b \ni a$$

بدراسة هذه العلاقة نجد أن:

$$- \text{ع منعكسة، لأن } \forall a \ni a, \quad a \in E \Rightarrow a = a \Rightarrow a \in E$$

ع متناظرة، لأن

$$\text{إذا } a \in B \Leftrightarrow a \in E \Rightarrow a = b, \quad b \in E \Rightarrow b = a \Rightarrow a \in B$$

$$- \text{ع علاقة متعدية لأن } a \in B, \quad b \in E \Rightarrow a = b \Rightarrow a \in E \Rightarrow a = b \Rightarrow a \in B$$

$$b, \quad b \in E \Rightarrow a \in B \Rightarrow a = b \Rightarrow a \in B \Rightarrow a = b \Rightarrow a \in B$$

ومن خواص أعضاء التجزئ سوف يؤدي ذلك إلى أن $a = a$

$$n, \quad b \in B \Rightarrow a \in B$$

ن ع علاقة تكافؤ

سنبرهن أن $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ هي فصول التكافؤ، أي أن:

$$\forall a \in [a] \Leftrightarrow a \in B$$



لنفرض أن $X \ni P \Leftarrow E \ni A : P \ni A$

لنفرض أن $S \ni A \Leftarrow S \Leftarrow A \Leftarrow S \ni [P] \Leftarrow A \ni [P]$

لنفرض أن $S = [P] \Leftarrow S \Leftarrow P \Leftarrow E \ni A : P, S \Leftarrow A \Leftarrow S$
 $A \ni [P] \Leftarrow A$

من (١)، (٢) نحصل على $[P] = [A]$.

تمارين

(١) إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{2, 3, 5\}$ ، $C = \{1, 3, 5, 7\}$

أوجد الآتي:

$$(1) A \times A \quad (3) A \times (B \Delta C)$$

$$(2) A \times (B - C) \quad (4) (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(5) (A - B) \times (A - C) \quad (6) (B \Delta C) \times (A \Delta B)$$

(٢) للمجموعات الاختيارية A ، B ، C أثبت أن

$$(1) A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

$$(2) (B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$$

$$(3) A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$$

$$(4) (B \Delta C) \times A = (B \times A) \Delta (C \times A)$$

٣- إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ وكانت $B = \{-2, 0, 2, 5\}$

(١) أوجد العلاقة R من A إلى B حيث

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow a > b.$$

(ب) أوجد العلاقة R من A إلى B حيث $(a, b) \in R \Leftrightarrow a < b.$

(٤) نفرض أن R علاقة على S معرفة كما يلي:

$$R = \{(s, s) : s \in S, s \neq 12\}$$

(أ) اكتب عناصر ع.

(ب) أوجد نطاق ومدى ع

(٥) بفرض أن ع علاقة على ط \times ط معرفة كما يلي:

$$(p, b) \in E \Leftrightarrow (b, d) \Leftrightarrow p = b - d$$

أثبت أن ع علاقة تكافؤ

(٦) بفرض أن ع علاقة على ص معرفة كما يلي:

$$E = \{(s, v) : s, v \in \mathbb{N}, s + v = \text{عدد فردي}\}.$$

ادرس العلاقة ع.

(٧) ادرس العلاقة ع على ص في كل حالة مما يأتي:

$$(1) (p, b) \in E \Leftrightarrow p > b$$

$$(2) (p, b) \in E \Leftrightarrow p - b \text{ هو عدد زوجي}$$

$$(3) (p, b) \in E \Leftrightarrow 0 \leq p \leq b$$

$$(4) (p, b) \in E \Leftrightarrow p^2 = b^2$$

$$(5) (p, b) \in E \Leftrightarrow |p - b| < 1$$

$$(6) (p, b) \in E \Leftrightarrow p \neq b$$

(٨) نفرض أن $A = \{p, b, j\}$ عرف علاقة ع على أ ذات أقل رتبة بحيث

تكون:

(أ) منعكسة ومتناظرة وغير متعدية.

(ب) منعكسة وغير متناظرة ومتعدية.

(ج) منعكسة وغير متناظرة وغير متعدية.

(د) غير منعكسة وغير متناظرة ومتعدية.

(هـ) غير منعكسة وغير متناظرة وغير متعدية.

(و) علاقة تكافؤ بحيث $[P] = [B]$.

(٩) بفرض أن V_1, V_2, V_3 مجموعات جزئية من حيث أن:

$$V_1 = \{n \in V : n = m^3, m \in V\}$$

$$V_2 = \{n \in V : n = m^3 + 1, m \in V\}$$

$$V_3 = \{n \in V : n = m^3 + 2, m \in V\}$$

(أ) أثبت أن $\{V_1, V_2, V_3\}$ تجزئة للمجموعة V .

(ب) عرّف علاقة التكافؤ على V بحيث تكون V_1, V_2, V_3 هي فصول التكافؤ.

(١٠) إذا كانت E علاقة على مجموعة غير خالية A ، أثبت أن:

$$(أ) E \text{ متناظرة} \Leftrightarrow E^{-1} \text{ متناظرة}$$

$$(ب) E \text{ متعدية} \Leftrightarrow E^{-1} \text{ متعدية.}$$

(١١) نفرض أن X مجموعة غير خالية، ادرس العلاقة في كل حالة مما يلي:

$$(١) (A, B) \in E \Leftrightarrow A \cap B = \Phi, A, B \in P(X)$$

$$(٢) (A, B) \in E \Leftrightarrow A \supseteq B, A, B \in P(X)$$

$$(٣) (A, B) \in E \Leftrightarrow A \cup B = X, A, B \in P(X)$$

$$(4) (a, b) \in E \Leftrightarrow a - b = \Phi, a, b \in P(x)$$

$$(5) (a, b) \in E \Leftrightarrow a \geq b \vee b \geq a, a, b \in P(x)$$

حيث $P(X)$: مجموعة كل المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من المجموعة غير الخالية X

(١٢) بفرض أن E_1 و E_2 علاقتان على المجموعة غير الخالية X ، ناقش صحة كل عبارة من العبارات الآتية:

(أ) E_1, E_2 علاقتان منعكستان $\Leftrightarrow E_1 \cup E_2$ علاقة منعكسة.

(ب) E_1, E_2 علاقتان منعكستان $\Leftrightarrow E_1 \cap E_2$ علاقة منعكسة.

(ج) E_1, E_2 علاقتان منعكستان $\Leftrightarrow E_1 - E_2$ علاقة منعكسة.

(د) E_1, E_2 علاقتان متماثلتان $\Leftrightarrow E_1 \cup E_2$ علاقة متماثلة.

(هـ) E_1, E_2 علاقتان متماثلتان $\Leftrightarrow E_1 \cap E_2$ علاقة متماثلة.

(و) E_1, E_2 علاقتان متماثلتان $\Leftrightarrow E_1 - E_2$ علاقة متماثلة.

(ز) E_1, E_2 علاقتان ناقلتان $\Leftrightarrow E_1 \cap E_2$ علاقة ناقلة.

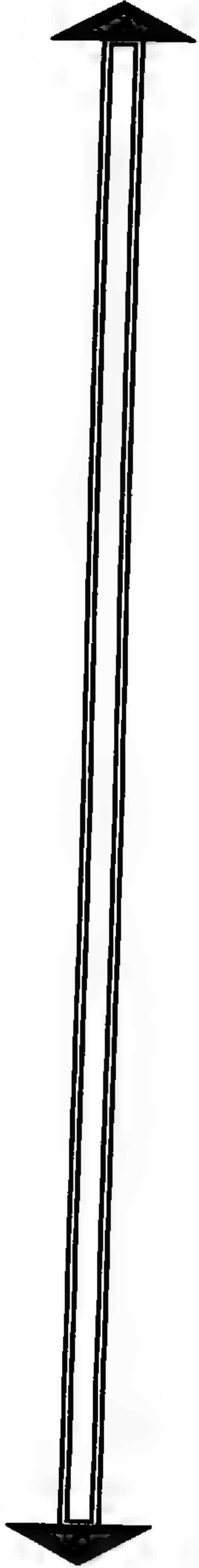
(ح) E_1, E_2 علاقتان ناقلتان $\Leftrightarrow E_1 - E_2$ علاقة ناقلة.

(ط) E_1, E_2 علاقتا تكافؤ $\Leftrightarrow E_1 \cup E_2$ علاقة تكافؤ.

(ك) E_1, E_2 علاقتا تكافؤ $\Leftrightarrow E_1 \cap E_2$ علاقة تكافؤ.

(ل) E_1, E_2 علاقتا تكافؤ $\Leftrightarrow E_1 - E_2$ علاقة تكافؤ.

ملحوظة: المناقشة تعني البرهان في حالة نعم ومثالاً عكسياً في حالة لا.



الدوال والمخططات

الفصل السابع

الدوال ومخططاتها

٢- العلاقة Relation :

قبل أن ندرس مفهوم الدالة يجب أن نوضح مفهوم العلاقة وبهذا سنجد مدخلاً إلى هذا المفهوم الذي يلعب دوراً أساسياً في حساب التفاضل والتكامل. حيث أن العرب قد عرفوا نظام حساب المساحات للأشكال الهندسية ومنها أشكال المقاطع المخروطية، غير أن عدم وجود مفهوم خاص للدالة أوقف الحساب فترة من الزمن. لهذا فهناك قفزة واضحة في هذا المضمار بعد أن وجد مفهوم الدالة.

لنبدأ أولاً بتعريف الأزواج المرتبة.

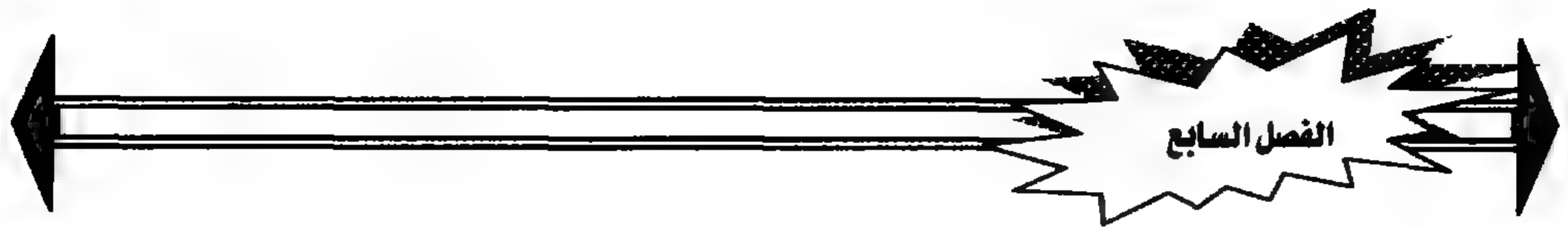
تعريف ٢-١: لتكن كل من S ، V مجموعة غير خالية، فلكل $s \in S$ ،
 $v \in V$ $s \in V$ يوجد زوج مرتب (s, v) ، يعرف (s, v) ،
 $(s, v) = \{s, \{s, v\}\}$ ومن هذا التعريف يكون:

$$(p) = (s \text{ ص } s) \Leftrightarrow p = s \text{ و } s = s$$

ويدعى s^* بالإحداثي الأول ويدعى v^* بالإحداثي الثاني، كما توجد مجموعة كل الأزواج المرتبة للمجموعتين s ، v ويرمز لها $s \times v$ ويكون:

$$s \times v = \{(s^*, v^*) : s^* \in s, v^* \in v\}.$$

ولتوضيح فكرة الأزواج المرتبة بين مجموعتين فإننا سنعطي الأمثلة التالية:



مثال (١):

لتكن كل من S ، V مجموعة من الأشخاص وأن $\{وليد، صبا، ياسمين\}$
 $= S$.

و $V = \{أحمد، سيف\}$ فإن $(وليد، سيف)$ زوج مرتب من هاتين
 المجموعتين كما أن $(صبا، أحمد)$ زوج مرتب أيضاً. ومن التعريف ٢-١ يكون:
 $\{(ياسمين، سيف)، (ياسمين، أحمد)، (صبا، سيف)، (صبا، أحمد)، (وليد، سيف)، (وليد، أحمد)\}$
 $= S \times V$

كما توجد مجموعة أخرى من الأزواج المرتبة هي:

$\{(سيف، ياسمين)، (أحمد، ياسمين)، (سيف، صبا)، (أحمد، صبا)، (سيف، وليد)، (أحمد، وليد)\}$
 $= V \times S$

مثال (٢): لتكن كل من S ، V مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد
 الصحيحة V ، حيث $S = \{١، ٢\}$ و $V = \{١-، ٠، ١\}$ فإن $(٠، ٢)$ زوج
 مرتب في S ، و V كما أن $(٢، ٠)$ يكون زوج مرتب في V و S فعليه
 نستطيع القول أن:

$$S \times V = \{(١-، ٢)، (٠، ٢)، (١، ٢)، (١-، ١)، (٠، ١)، (١، ١)\}$$

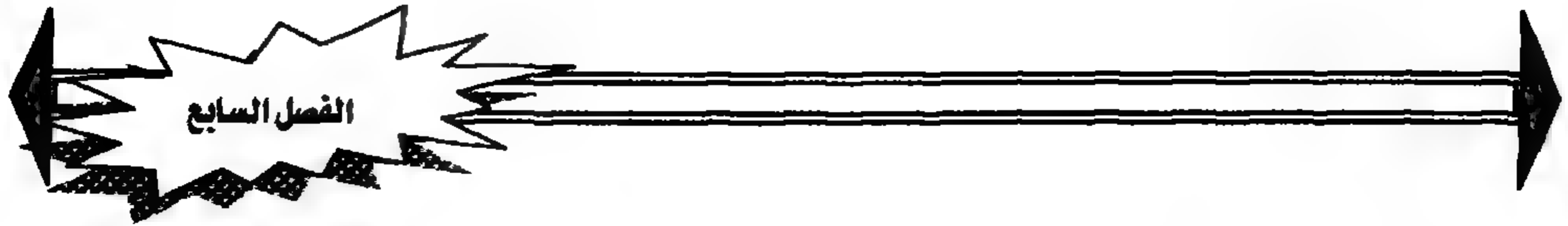
$$V \times S = \{(٢، ١-)، (١، ١-)، (٢، ٠)، (١، ٠)، (٢، ١)، (١، ١)\}.$$

ومن هذين المثالين نجد أنه ليس من الضروري أن تكون $S \times V$ تساوي
 $V \times S$ لذا فإن الترتيب هنا ذا أهمية واضحة، لذا قلنا زوج مرتب.

تعريف ٢-٢:

لتكن كل من S ، V مجموعة غير خالية، ولتكن \emptyset مجموعة غير خالية





من أزواج مرتبة (s, v) حيث $s \in S$ و $v \in V$ أي أن $\emptyset \subset S \times V$ فيقال أن \emptyset علاقة Relation من S إلى V ، بمعنى آخر:

$$\emptyset = S \times V \Leftrightarrow \text{ي علاقة من } S \text{ إلى } V.$$

مثال (٣):

لتكن كل من S و V مجموعة كما في مثال (٢)، فإن المجموعة $\emptyset = S \times V = \{(1, 1), (1, 0), (2, 0)\}$

تكون علاقة من S إلى V بينما المجموعة $\emptyset = \{(2, 1), (2, 0)\}$ تكون علاقة من V إلى S .

تعريف ٢-٣:

لتكن كل من S و V مجموعة غير خالية، ولتكن $\emptyset \subset S \times V \neq \emptyset$ وليكن $(s, v) \in \emptyset$ فيقال للعنصر $v \in V$ بأنه قيمة \emptyset في S أو يقال أن v صورة s بفعل \emptyset .

مثال (٤): لتكن كل من S و V مجموعة كما في مثال (٢): فإن المجموعة:

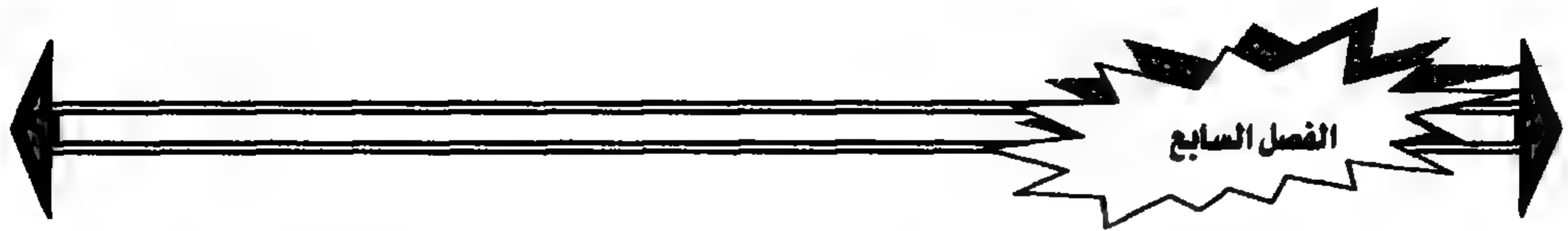
$$\emptyset = \{(1, 1), (1, 0)\} \subset S \times V$$

تكون علاقة وأن قيمة \emptyset في S هما العددان الصحيحان $1, 0$ كما أنه من الملاحظ ليس كل عدد $s \in S$ توجد قيمة \emptyset في S ، مثلاً العدد 2 عنصر ينتمي إلى S بينما لا توجد قيمة \emptyset في S .

٢-٢ الدالة Function:

في دراستنا المستقبلية سنهتم بنوع خاص من العلاقات من مجموعة معينة





إلى مجموعة أخرى إلى مجموعة أخرى معينة، وهذا النوع الخاص من العلاقة يدعى بالدالة.

تعريف ٢-٤:

لتكن كل من S و V مجموعة غير خالية فيقال:

١- الثلاثي المرتب (S, V) دالة \mathcal{V} $\supset S \times V \neq \Phi$ بحيث لكل S^* في S توجد قيمة واحدة فقط إلى \mathcal{V} في S^* .

٢- يرمز لهذا الثلاثي المرتب بالرمز $\mathcal{V}: S \leftarrow V$ أو $S \xleftarrow{\mathcal{V}} V$ فإن $\mathcal{V}: S \leftarrow V$ دالة \mathcal{V} علاقة من S إلى V بحيث لكل S^* في S توجد قيمة واحدة \mathcal{V} في S^* ويرمز لهذه القيمة بالرمز $\mathcal{V}(S^*)$.

٣- إذا كان $\mathcal{V}: S \leftarrow V$ دالة فإن \mathcal{V} يدعى بيان الدالة و S منطلق الدالة و V مستقرة الدالة.

٤- المجموعة $\{ \mathcal{V}(S^*) : S^* \in S \}$ والتي يرمز لها بالرمز $\mathcal{V}(S)$ تدعى مدى الدالة.

من الملاحظ في هذا التعريف أن $\mathcal{V}(S) \neq \Phi$ ولتوضيح فكرة الدالة نأخذ الأمثلة التالية:

مثال (١): لتكن $S = \{\text{وليد، صبا، ياسمين}\}$ و $V = \{\text{أحمد، سيف}\}$ ولتكن

$$\mathcal{V} = \{(\text{وليد، أحمد}), (\text{صبا، أحمد}), (\text{ياسمين، سيف})\}$$

فمن الواضح من الأمثلة السابقة أن $\mathcal{V}: S \times V \neq \Phi$ أي أن \mathcal{V}



علاقة من S إلى V وأن كل عنصر في S وهم: وليد، صبا، ياسمين يظهر كإحداثي أول في زوج مرتب واحد فقط، وهذه الأزواج هي (وليد، أحمد)، (صبا، أحمد)، (ياسمين، سيف) أي أن قيمة v في وليد هي أحمد وقيمة v في صبا هي أحمد وقيمة v في ياسمين هي سيف، أي أن قيمة v في S تكون واحدة لكل $S \in S$ وبذلك فإن $v : S \rightarrow V$ ي تمثل الدالة.

مثال (٢): لتكن كل من S و V كما في المثال (١)، وأن:

$H = \{(وليد، أحمد)، (صبا، أحمد)، (وليد، سيف)، (ياسمين، سيف)\} = H$.

فإن $H : S \rightarrow V$ لا تمثل دالة، وبالرغم من أن H علاقة من S إلى V . لأن وليد، وهو كما نعلم عنصر في S ، يظهر كإحداثي أول في زوجين مرتبين في H وهي

(وليد، أحمد) و (وليد، سيف) أي أن H لها قيمتين في وليد.

مثال (٣): لتكن S و V كما في المثال (١) وأن:

$H = \{(أحمد، صبا)، (سيف، وليد)\}$ فإن $H : S \rightarrow V$ لا تمثل دالة بالرغم من أن H علاقة من S إلى V لأن ياسمين عنصر في S لا تظهر كإحداثي أول في زوج مرتب في المجموعة H ، وهذا ينافي الشرط كون كل عنصر $S \in S$ توجد قيمة واحدة لـ v في S .

مثال (٤): لتكن كل من S و V مجموعة الأعداد الحقيقية: ولتكن:

$$v = \{(s, s^2) : s \in S\} \supset S \times V$$

بما أن كل عدد حقيقي s يوجد عدد حقيقي واحد s^2 . $s^2 = s$ (من تعريف عملية الضرب) فإن v علاقة من S إلى V كما أن

١ : $s \leftarrow v$ تكون دالة. لأن كل s^* في s يظهر كإحداثي أول في زوج مرتب واحد فقط في v وهذا الزوج المرتب هو (s^*, s^*) وبذلك لكل s^* في s توجد قيمة واحدة إلى v في s^* وهي s^* وهذه القيمة هي $v(s^*)$ فعليه

١ : $s \leftarrow v$ وأن v كما معرفة سابقاً ستكون دالة. واعتيادياً تكتب هذه الدالة على النحو التالي:

$$١ : s \leftarrow v \text{ بحيث أن } v(s^*) = s^* \text{ لكل } s^* \in s.$$

ويتضح مما سبق أن منطلق هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية وبدوره يكون مستقرها. غير أن المجموعة $v(s) = \{v(s^*) : s^* \in s\}$ فتكون الأعداد الحقيقية الموجبة م الصفر، أي أن مدى هذه الدالة يكون المجموعة $\{v : v \geq 0\}$.

مثال (٥): لتكن لكل من s و v مجموعة الأعداد الحقيقية في المجموعة:

$$١ = \{ (s^*, \sqrt{s^*}) : s^* \in s \} \supset s \times v$$

لا تمثل بيان دالة بالرغم من كونها علاقة من s إلى v ، لأن الأعداد الحقيقية السالبة لا توجد لها جذور تربيعية حقيقية (لا يوجد عدد حقيقي $\sqrt{-1}$ بحيث $\sqrt{-1}^2 = -1$ حيث $b < 0$) بمعنى آخر لا توجد قيمة إلى v في s^* عندما $s^* < 0$ ، لذلك ليست كل الأعداد الحقيقية s^* في s تظهر كإحداثي أول في زوج مرتب $(s^*, \sqrt{s^*})$ لذا فإن $١ : s \leftarrow v$ بحيث أن

$$١(s^*) = \sqrt{s^*} \text{ لكل } s^* \in s \text{ لا تمثل دالة.}$$

مثال (٦):

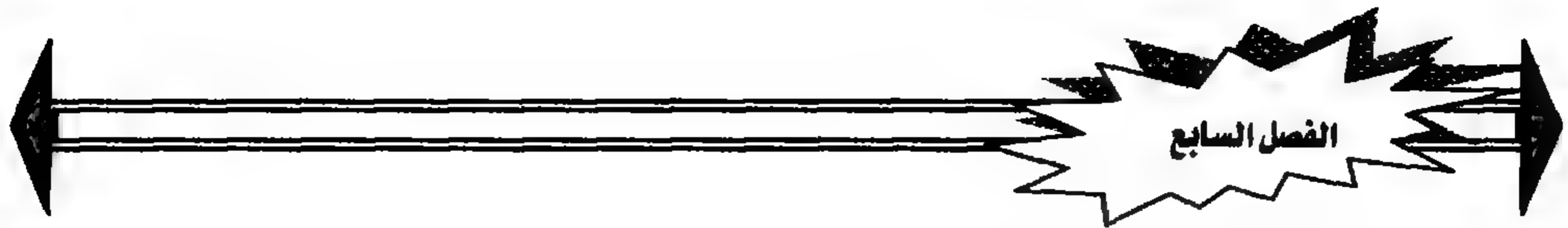
فلو أخذنا نفس المثال غير أن المجموعة $S = \{s : s \in H, s \leq 0\}$ فإن المجموعة تكون علاقة كما في مثال (٥) وكل عدد حقيقي $s \in S$ ، أي لكل عدد حقيقي $s \leq 0$ يوجد عدد حقيقي واحد \sqrt{s} ، لذا فإن \sqrt{s} قيمة s (عندما $s \leq 0$) بفعل \sqrt{s} عدد حقيقي واحد هو \sqrt{s} الذي هو \sqrt{s} وبذلك ستكون $S : s \leftarrow \sqrt{s}$ بحيث أن $\sqrt{s} = \sqrt{s}$ لكل $s \in S$ \Rightarrow S تمثل دالة حيث \sqrt{s} تمثل بيان الدالة، S منطلقها و \sqrt{s} مستقرها. ويكون بهذا الترتيب مدى هذه الدالة المجموعة الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وهي:

$$S = \{s : s \in H, s \leq 0\}.$$

مثال (٧):

لتكن K من S و S مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن $S = \{(s, 1) : s \text{ عدد نسبي}\} \cup \{(s, 2) : s \text{ عدد غير نسبي}\}$ من الواضح أن كل زوج مرتب في المجموعة S يكون عنصراً في $S \times S$ لذا فإن $S \supset S \times S \neq \emptyset$ فعلية فإن S تمثل علاقة من S إلى S .

كل عدد حقيقي s إما أن يكون نسبياً وإما أن يكون غير نسبياً، فلو كان s عدداً حقيقياً غير نسبياً فإن s تظهر كإحداثي أول في زوج مرتب واحد فقط وهو $(s, 2)$ في S لأن هذا الزوج المرتب $(s, 2)$ كما تعلم يكون في المجموعة $\{(s, 2) : s \text{ عدد غير نسبي}\}$ ولذلك فهو في S . وبنفس الترتيب

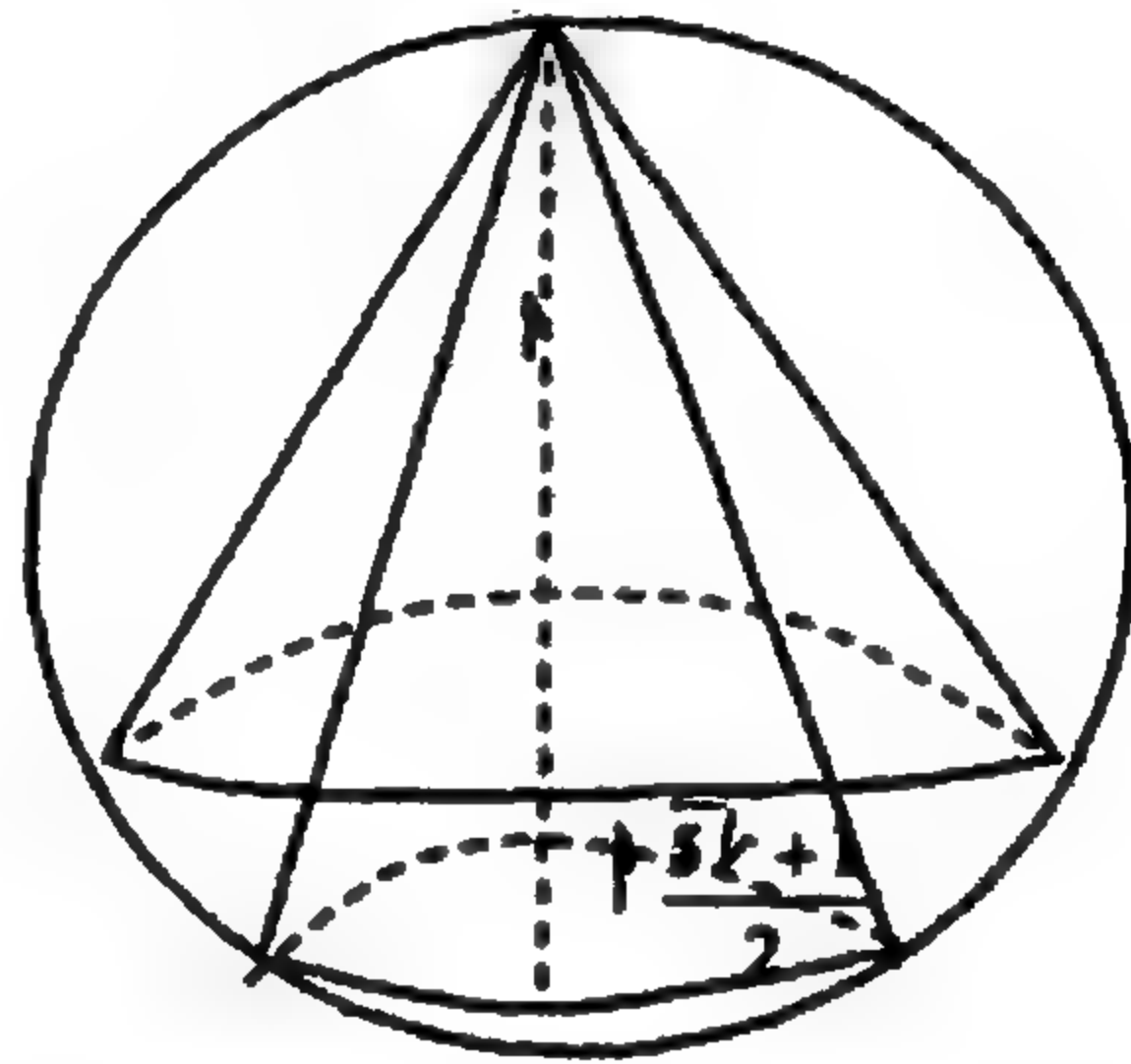


عندما يكون s^* عدداً حقيقياً نسبياً، وكذا ولكل عدد حقيقي s^* توجد قيمة واحدة إلى s في s^* وهذه القيمة هي ١ عندما تكون s^* عدداً حقيقياً نسبياً وتكون ٢ عندما تكون s^* عدداً حقيقياً غير نسبي، فتكون العلاقة s من s إلى s دالة من s إلى s وكما تعودنا على كتابة الدالة فتكون:

$s : s \leftarrow s$ دالة بحيث أن

$$\left. \begin{array}{l} (١, s^*) \text{ عدد نسبي} \\ (٢, s^*) \text{ عدد غير نسبي} \end{array} \right\} = s \text{ في } s^*$$

ومن الواضح هنا أن مدى هذه الدالة هي المجموعة $\{1, 2\}$



في الفصول القادمة ستصادفنا بعض الدوال التي نستنبطها من مسألة معينة، وذلك لإيجاد بعض الخواص أو بعض مطالبات معينة من هذه المسألة. وتوضيحاً لهذه الفكرة التي سنواجهها في مسائل عديدة في الفصول القادمة. نجد من الأفضل وضع مثال توضيحي لهذه الأفكار.

مثال (١):

كرة نصف قطرها ١، رسم في داخلها مخروط قائم رأسه ومحيط قاعدته يقع على سطح هذه الكرة، كما في الشكل (٢-١). ما علاقة ارتفاع المخروط بحجمه؟

لايجاد هذه العلاقة نعتمد على بعض الخواص الهندسية، فلو افترضنا أن ارتفاع المخروط $أ ب$ يساوي عدداً حقيقياً $س^*$ ، فنستطيع القول أن هذا العدد الحقيقي $س^*$ يكون $٠ \leq س^* \leq ٢$. في المثلث القائم الزاوية $م ن هـ$ ، فإن $م هـ$ يمثل بالعدد ٢ و $م ن$ يمثل بالعدد $|س^* - ٢|$ (وذلك بالإمكان كون النقطة بين $أ$ و $م$) لذا فإن $ن هـ$ يمثل بالعدد:

للعدد الحقيقي $٢٢ - (س^* - ٢)^٢ = ٢س^* - (س^* - ٢)^٢$ وبذلك يكون حجم المخروط مساوياً

ص. $\frac{\pi}{٣} س^* (٢ - س^*)^٢$ ، ولتكن $س = \{س^* : ٠ \leq س^* \leq ٢\} \supset س \times$

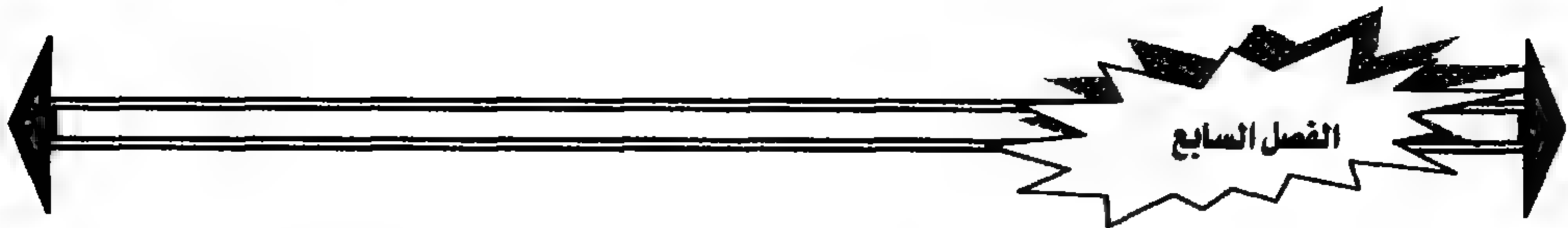
وتكون $و : س \leftarrow ص$ حيث أن $و(س) = \frac{\pi}{٣} س^* (٢ - س^*)^٢$ لكل $س^*$ في $س$ تمثل دالة، لأن كل $س^*$ في $س$ توجد قيمة واحدة فقط إلى $و$ في $س^*$ ، فمثلاً قيمة $و$ في ٢ تساوي $\frac{\pi}{٣} ٢^٢$ لأن $\frac{\pi}{٣} ٢^٢ = \frac{\pi}{٣} ٢ (٢ - ٢)^٢ = ٠$ و (٢) وسوف نترك للطلاب إيجاد كل من $و(\frac{١}{٢})$ و $و(\frac{٢}{٣})$ و $و(\frac{٤}{٣})$ (تمارين):

١- لتكن $أ = \{١، ٢\}$ $ب = \{٢، ٣\}$ $ج = \{١، ٢\}$

جد المجموعة $أ \times (ب \cup ج)$ $(أ \times ب) \cup (أ \times ج)$

٢- لتكن كل من $أ، ب، ج$ مجموعة برهن $أ \times (ب \cup ج) = (أ \times ب) \cup (أ \times ج)$

$أ \times (ب \cap ج) = (أ \times ب) \cap (أ \times ج)$



٣- لتكن $A = \{1, 2, 3\}$ ولتكن $B = \{1, 3, 5\}$ جد العلاقة R من A إلى

B ، بحيث $(A, B) \in R \Leftrightarrow B < A$.

٤- لتكن كل من A و B مجموعة الأعداد الطبيعية ولتكن $R = \{(A, B) \mid A + B = 12\}$:

$A \times B$ ، فكم عنصر تحتوي العلاقة R من A إلى

B ؟ وما هي هذه العناصر؟

٥- لتكن $S = \{1, 2, 3, 4\}$ فأني مما يلي تكون دالة؟ ولماذا؟

أ- $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$.

ب- $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1)\}$.

ج- $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (1, 4)\}$..

د- $R = \{(1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ ، ولتكن $S = \{1, 2, 3\}$ ،

$\{4, 5\}$ ، لتكن فأوجد قيم ما يلي:

هـ (ق(٣))، $R(3, 3)$ ، هـ (٢)، هـ (٤)، هـ (٣)، $R(2)$ ، هـ (٤)، هـ (٥).

.

٦- لتكن $S = \{1, 2, 3\}$ فأوجد جميع الدوال R : $S \leftarrow S$ الممكنة.

٧- لتكن $S = \{1, 2, 3\}$ ولتكن $V = \{-1, 0\}$ أوجد جميع الدوال R :

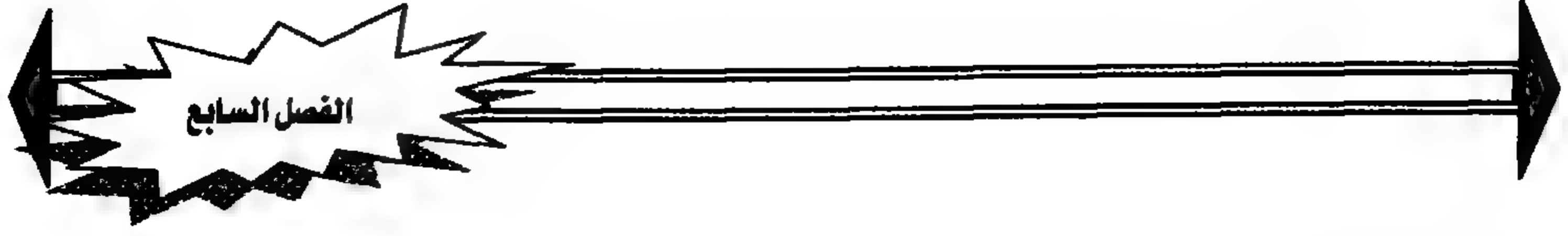
$S \leftarrow V$ الممكنة.

٣-٢ تصنيف خاص للدوال :

هناك تصنيف معين للدوال غير أن أهمها وربما يكون أكثرها فعالية وهي

المساواة.





تعريف ٥-٢:

لتكن كل من $\mathcal{U} : \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{V}$ و $\mathcal{H} : \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{V}$ دالة فيقال أن هاتين الدالتين. متساويتان $\mathcal{U}(\mathcal{S}) = \mathcal{H}(\mathcal{S})$ لكل \mathcal{S}^* في \mathcal{S} ويرمز لهذا التعبير $\mathcal{U} = \mathcal{H}$ (لأن من الواضح أن لهما نفس المجال ونفس المدى).

لذا $\mathcal{U} = \mathcal{H} \Leftrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{S}) = \mathcal{H}(\mathcal{S})$ لكل $\mathcal{S}^* \in \mathcal{S}$.

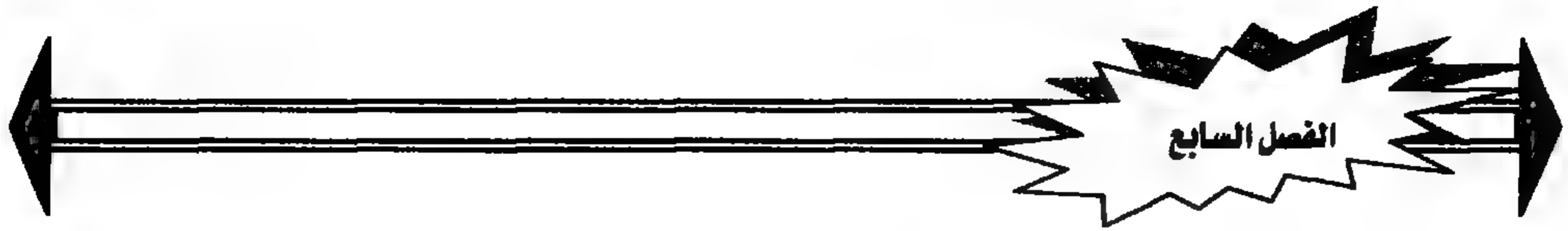
ربما توجد هناك بعض الدوال لها نفس العمل غير أن مجالاتها تختلف، وهل يمكن القول أن هذه الدوال متساوية أم لا؟ وللإجابة عن هذا نعطي التعريف التالي الذي سيوضح الفكرة.

تعريف ٦-٢: لتكن كل من $\mathcal{U} : \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{V}$ و $\mathcal{A} : \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{V}$ دالة وأن $\mathcal{A} \supset \mathcal{S} \neq \emptyset$ بحيث $\mathcal{U}(\mathcal{S}) = \mathcal{H}(\mathcal{S})$ لكل \mathcal{S}^* في \mathcal{A} .

فيقال أن الدالة $\mathcal{H} : \mathcal{A} \leftarrow \mathcal{V}$ تحديد restriction للدالة $\mathcal{U} : \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{V}$ على المجموعة الجزئية \mathcal{A} ، ويرمز إلى \mathcal{H} في بعض الأحيان $\mathcal{U}|_{\mathcal{A}}$ لذا فإن $\mathcal{H} = \mathcal{U}|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \leftarrow \mathcal{V}$ تكون دالة.

والآن لو قلنا إذا كانت $\mathcal{U} : \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{V}$ دالة و $\mathcal{A} \supset \mathcal{S}$ ، فهل توجد دالة من \mathcal{A} إلى \mathcal{V} ؟ فالجواب طبيعي نعم وهي تحديد هذه الدالة على \mathcal{A} أي $\mathcal{U}|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \leftarrow \mathcal{V}$ والسؤال الذي يتبادر إلى الذهن، هل توجد دالة واحدة فقط إما تكون أكثر من واحدة لها نفس الخاصية؟ فالجواب توجد دالة واحدة فقط لكن البرهان سيترك للقارئ لبساطته وما هو إلا تطبيق للتعريف أعلاه. وبذلك يمكن أن تصاغ على شكل النظرية التالية:





نظرية ٢-٧:

إذا كانت $f: S \rightarrow T$ دالة وأن $A \subset S$ فتوجد دالة واحدة فقط $f|_A: A \rightarrow T$ تحديد للدالة f على المجموعة الجزئية A . هناك سلوكية معينة لبعض الدوال، وسوف نعلق أسماء معينة اعتماداً على هذه السلوكية، وذلك اختصاراً لذكر شروط هذه السلوكية، ومن هذه الأنواع التي ستصادفنا عند دراستنا هي:

تعريف ٢-٨: لتكن $f: S \rightarrow T$ دالة فيقال أن هذه الدالة متباينة (one - one) \Leftrightarrow inductive لكل $s \in S$ ، $f(s) \neq f(s')$ لأي $s' \in S$ ، $s' \neq s$ فإن $f(s) \neq f(s')$

شاملة (one to) \Leftrightarrow surjective

لكل $t \in T$ يوجد $s \in S$ بحيث $f(s) = t$ و $f(s) = t$ لأي $s \in S$ ، $f(s) = t$

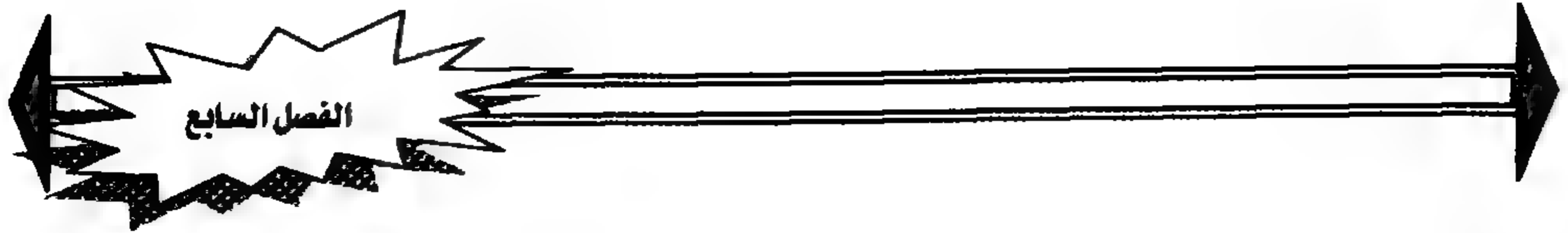
متقابلة (one - one and onto) \Leftrightarrow bijective

عندما تكون الدالة متباينة وشاملة، وضعنا تعريفين للدوال المتباينة والدوال الشاملة، غير أن التعريفين متكافئان، ولكن تكافؤ هذين التعريفين سيترك برهنه للقارئ كتمرين خاص.

لو تفحصنا الدالة في مثال (١) في البند السابق، فإنها ستكون شاملة لأن كل عنصر $t \in T$ في T يوجد عنصر $s \in S$ في S بحيث $f(s) = t$ أو نستطيع القول أن:

$f = \{(أحمد، سيف)، (ياسمين، و)، (صبا، و)، (وليد، و)\} = \{(س)، (و)\}$ غير أن هذه الدالة غير متباينة، لأن $f(أحمد) = f(وليد) = و$





أحمد غير أن صبا \neq وليد وعليه فإن هذه الدالة لا تكون متقابلة.

أما في مثال (٤) في البند السابق، نعلم أن كل من s و v مجموعة الأعداد الحقيقية و $v:s \leftarrow v$ دالة بحيث $v(s) = s^2$ لكل s في s .

لنأخذ $p \ni s$ بحيث $0 < p$ ، فإن $p \neq p -$ غير أن $v(p) = (p -) = (p -) = p^2$ فعليه، فإن هذه الدالة غير متباينة، ولو أخذنا $b \ni v$ بحيث أن $b < 0$ فلا يوجد عدداً حقيقياً p بحيث

$$0 < b = p^2 = v(p) \text{ وهذا ينفي كون الدالة شاملة.}$$

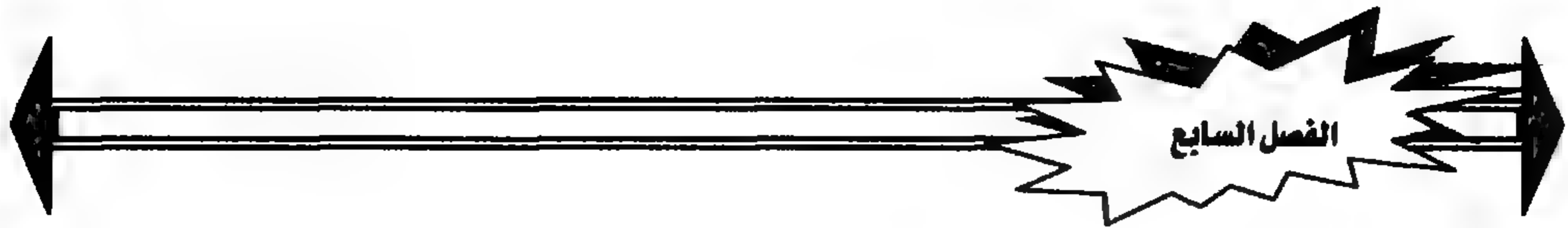
أما ما جاء عن الدالة في المثال (٦) في البند السابق، فإن $v(s) \neq v$ لذا فإنها غير شاملة ولو كان $v(s) = v(v(s))$ إذا $s = v$ فإن $s^* = v^* =$ لكل عددين حقيقين s^*, v^*

فعليه تكون هذه الدالة متباينة.

والدالة في المثال (٧) في البند السابق، سنترك برهان هذه الدالة ليست شاملة، وغير متباينة تمرين للقارئ، لاختبار مدى استيعابه لهذا المفهوم.

أما الدالة في المثال (٨) في البند السابق، هي $v:s \leftarrow v$ حيث أن: $v(s) = \frac{\pi}{3} s^2 (s - 12)$ لكل s في المجموعة $s = \{s^* \in \mathbb{R} : 0 \leq s^* \leq 12\}$ وأن v مجموعة الأعداد الحقيقية.

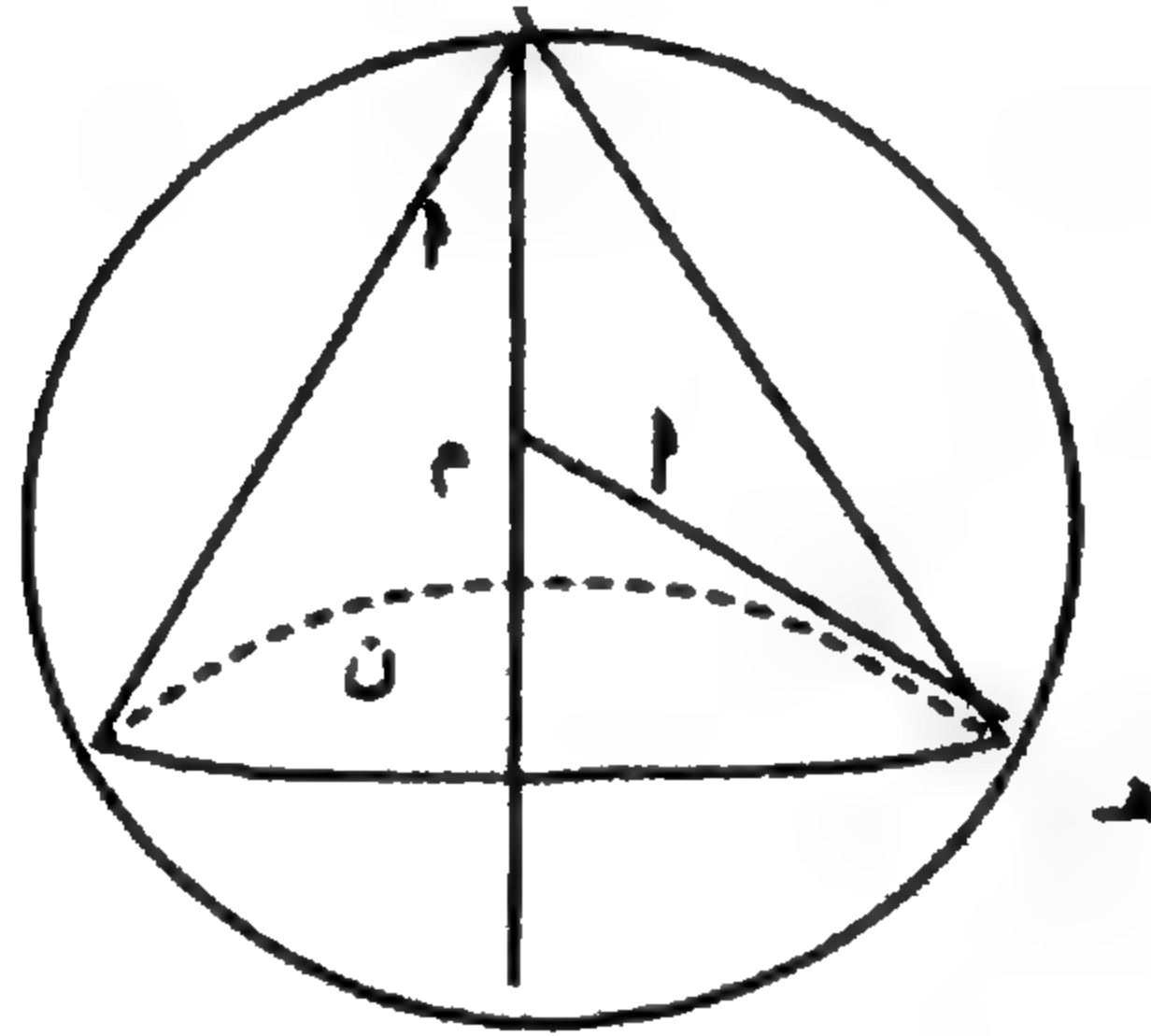
ولو جردنا هذه الدالة عن صيغتها الهندسية، نلاحظ أن الأعداد السالبة لا



تكون في مدى هذه الدالة، لأن $(٢٢ - س^*)$ و $س^*$ و $\frac{\pi}{٣}$ أعداد حقيقية موجبة أو صفر لكل $٠ \leq س^* \leq ٢٢$ لذا فإن $١(س) \neq ص$ وبالتالي فإن هذه الدالة لا تكون شاملة، فعليه لا تكون متقابلة.

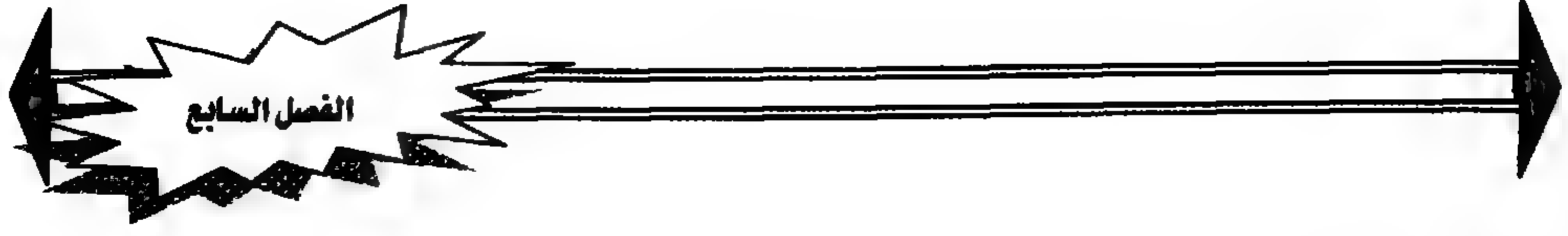
نعلم أن ١ و $\frac{١(\sqrt{٥}+١)}{٢}$ عدنان حقيقيان وأن $٠ \leq ١ < \frac{١(\sqrt{٥}+١)}{٢} \leq ٢٢$ وأن $١(١) = ١ = \left(\frac{١(\sqrt{٥}+١)}{٢}\right)١ = \frac{\pi}{٣}$ لذا فإن هذه الدالة غير متباينة.

أما الخلفية لهذا المفهوم، وجود مخروطين أحدهما ارتفاعه ١ والآخر ارتفاعه $\frac{١(\sqrt{٥}+١)}{٢}$ ولهما نفس الحجم، كما هو في الشكل (٢-٢)



٢-٤ الدوال العددية:

من الآن وصاعداً سنهتم بنوع خاص من الدوال وسنطلق عليها الدوال العددية، لأن الأعداد الحقيقية حسب ما تعلمنا في الفصل الأول يمكن التعامل بها وحسابها. ومن أنواعها الدوال الواردة في الأمثلة (٤)، (٦)، (٧)، (٨) في البند ٢-٢:



تعريف ٢-٩:

لتكن U : $S \leftarrow V$ دالة فيقال أن هذه الدالة عددية مجالها ومداها مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

لقد درسنا في الفصل الأول نظام الأعداد الحقيقية وشاهدنا وجود عمليتين ثنائية وهما عمليتا الجمع والضرب ويمكن الحصول على عمليتين ثنائية وهما الطرح، والقسمة. وكما نعلم أن الدوال ليست أعداد ولكنها تسلك سلوكية الأعداد حيث يمكن جمعها وضربها كما سنشاهد ذلك.

لتكن S مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية R (هنا أهملنا الإرشادات للعمليات الثنائية وإشارة الترتيب) والتي تكون حقلاً مرتباً تماماً. فيوجد هناك دالة U : $S \leftarrow V$ بحيث $U(S^*) = J$ لكل $S^* \in S$ حيث J عدداً حقيقياً، فلو أخذنا مجموعة الدوال من S إلى R فستكون مجموعة غير خالية ويرمز اعتيادياً لهذه المجموعة بالرمز R^+ وكل عنصر في هذه المجموعة تكون دالة من S إلى R وبما أن المجال والمدى واضح فسنقرر بتسمية عناصر هذه المجموعة ببيان الدالة.

تعريف ٢-١٠: لتكن S مجموعة غير خالية من R فإن R^+ تعني المجموعة

$$\{U: S \leftarrow V\}.$$

نظرية ٢-١١: لتكن العملية . بين كل عنصرين في المجموعة R^+ بحيث

$$H(S^*) + U(S^*) = (H \oplus U)(S^*) \text{ لكل } S^* \text{ في } S \text{ ولكل } U \text{ و } H \text{ في } R^+ \text{ فإن } (H, +) \text{ تكون زمرة تبديلية.}$$

البرهان: ربما يبدو اصطلاح زمرة تبديلية غريبة على القارئ، ولكن سيتوضح معنى هذا التعبير من سياق البرهنة.

لتكن U ، $H \in U$ فتكون كل من U : $s \leftarrow s$ و H : $s \leftarrow s$ دالة أي يوجد عدد واحد $U(s)$ وعدد واحد هو $H(s)$ لكل s في U ، لذا فيوجد عدد واحد

$U(s) + H(s)$ لكل s في U . فتكون $U \oplus H$: $s \leftarrow s$ دالة لأن

$$U(s) + H(s) = (U \oplus H)(s) \text{ في } U.$$

وبعبارة أخرى: إذا كان U ، $H \in U$ وهذا إثبات الخاصية لإغلاق للعملية \oplus لتكن كل من U ، H عنصر في U فيكون من خاصية الإغلاق أن كل من $U \oplus H$ و $H \oplus U$ عنصر في المجموعة U وحسب خاصية الإغلاق سيكون كل من $(U \oplus H) \oplus U$ و $U \oplus (H \oplus U)$ عنصر في المجموعة U أيضاً، والسؤال هل سيكون كل منهما يمثل نفس العنصر في U أم لا؟

ونعلم من تعريف ٢-٥ أنهما يكونان نفس العنصر أي متساويان إذا كان $((U \oplus H) \oplus U)(s) = (U \oplus (H \oplus U))(s)$ لكل s في U .

ولبرهنة هذه الخاصية نتبع الخطوات التالية: لكل s في U يكون من تعريف العملية من تعريف العملية $(U \oplus H) \oplus U = U \oplus (H \oplus U) + (U \oplus H) \oplus U = U \oplus (H \oplus U) + (U \oplus H) \oplus U$.

خاصية التجميع في الأعداد الحقيقية:

$$= (١(س) + هـ(س)) + هـ(س) = (١(س) + هـ(س)) + هـ(س) = (١(س) + هـ(س)) + هـ(س)$$

 وذلك من تعريف العملية \oplus في المجموعة ح
 وهذا برهان الخاصية النظير للإشارة \oplus .

ليكن كل من ١ و هـ عنصر في ح⁺ فإن لكل س^{*} في س يكون
 من تعريف العملية \oplus

$$١(س) \oplus هـ(س) = (١(س) + هـ(س))$$

من خواص الأعداد الحقيقية $= ١(س) + هـ(س)$

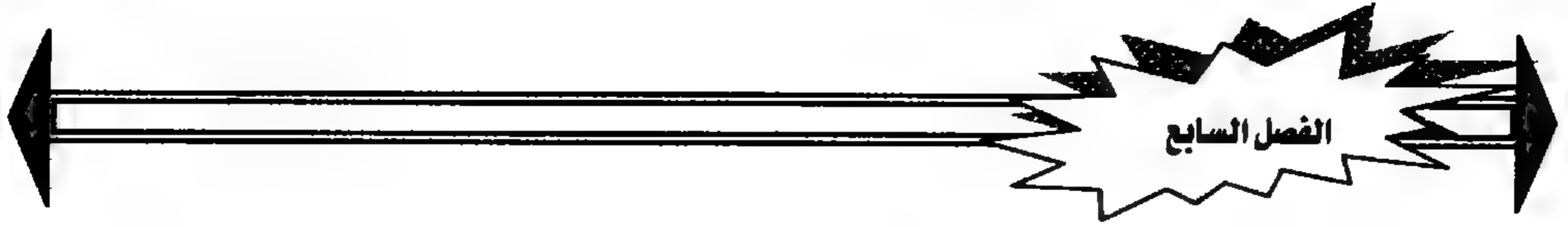
من تعريف العملية \oplus $= (١(س) + هـ(س))$

إذا $١ \oplus هـ = هـ \oplus ١$ وهذا إثبات لخاصية التبديلية للعملية \oplus .

إذا الخواص (الإغلاق، التجميع، التحايد، النظير، التبديلية) تحقق فإن
 (ح⁺، \oplus) تكون زمرة تبديلية.

هنا يمكن إبدال العملية \oplus و \ominus بإشارتي الجمع والطرح كما في الأعداد
 ويمكن التعريف على هذا الأساس $(١(س) + هـ(س)) = ١(س) + هـ(س)$
 $(-١(س)) = -١(س)$ لكل س^{*} في س.

وربما تكون هذه الصورة أوضح، ولكن تجنبنا هذا لأنها ليس نفس العملية
 غير أنهما لم نفس السلوكية، وبذلك تكون عملية الطرح كما يلي $١ - هـ =$
 $١ + (-هـ)$ في النظرية القادمة سنعطي نفس العملية الثنائية للأعداد الحقيقية
 والدوال، غير أن القارئ يجب أن يميز الاختلاف بينهما.



نظرية ٢-١٢:

لتكن العملية \cdot بين كل عنصرين في المجموعة H^+ بحيث $(u \cdot h) = (s^*)$
 $= (u(s^*) \cdot h(s^*))$ لكل s^* في S ولكل u و h في H^+ . فإن (H^+, \cdot)
تكون نصف زمرة تبديلية مع عنصر التحييد.

البرهان:

لتكن $h \in H^+$ و u فإن كل من $u : s \leftarrow h$ و $h : s \leftarrow u$
دالة لكل s^* في S يوجد عدد حقيقي واحد $u(s^*)$ وعدد حقيقي واحد
هو (s^*) لذا فلكل s^* في S يوجد عدد حقيقي واحد $u(s^*) \cdot h(s^*)$
فعليه تكون $(u \cdot h) : s \leftarrow u$ دالة عددية وذلك باستخدام الشرط $(u$
 $\cdot h)(s^*) = u(s^*) \cdot h(s^*)$ لكل s^* في S .

إذا $u \cdot h$ يكون عنصراً في المجموعة H^+ وهذا يثبت خاصية الإغلاق
للعلمية. لتكن $u, h, h^* \in H^+$ ، حسب خاصية الإغلاق تكون كل من u
 h و h^* عنصراً في المجموعة H^+ ولنفس السبب تكون كل من u
 $(h \cdot h^*)$ و $(u \cdot h)$ عنصراً في المجموعة H^+ ، نعلم أن كل s^* في S
يكون حسب خاصية العملية:

$$u \cdot (h \cdot h^*) = (u \cdot h) \cdot h^* = (u \cdot h)(s^*) \cdot h^*(s^*)$$

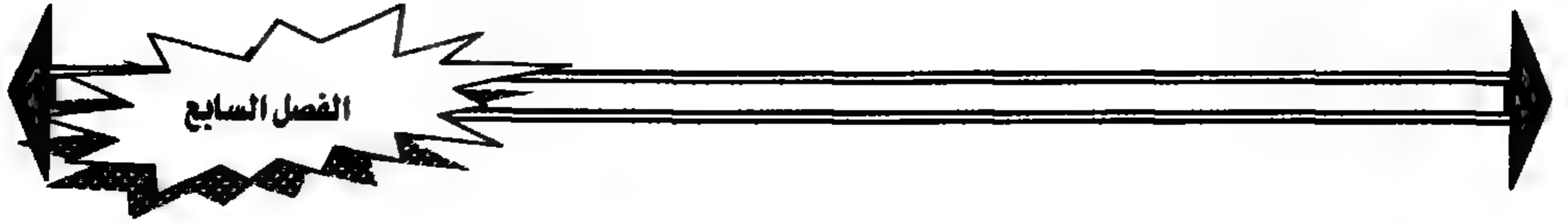
$$= u(s^*) \cdot (h \cdot h^*)(s^*)$$

$$\text{خاصية الأعداد الحقيقية} = (u \cdot h)(s^*) \cdot h^*(s^*)$$

$$\text{حسب خاصية العملية} = (u \cdot h)(s^*) \cdot h^*(s^*)$$

$$= (u \cdot (h \cdot h^*)) (s^*)$$





إذا $و . هـ = (و . هـ) * هـ$ وهذا يثبت خاصية التجميع للعملية.

لتكن $ل : س \leftarrow ح$ بحيث أن $ل (*س) = ١$ لكل $س * س \in س$.

فتكون $ل : س \leftarrow ح$ دالة، فعليه $ل * ح \equiv * ح$

ليكن $و$ عنصر في المجموعة $ح^+$ ، فلكل $س * س$ في $س$ يكون

من تعريف العملية $= (و . ل) (*س) = و (*س) . ل (*س)$

من تعريف $ل * و = و (*س) . ١$

من خواص الأعداد الحقيقية $و (*س) = و (*س)$

من خواص الأعداد الحقيقية $١ . و (*س) = و (*س)$

من تعريف $ل * و = و (*س) . و (*س)$

من تعريف العملية $(ل . و) (*س)$

إذا $و . ل = ل * و$ وهذا يثبت خاصية التحييد للعملية ليكن كل من $و$ ، $هـ$ عنصراً في المجموعة $ح^*$ فإن كل من $و . هـ$ و $هـ . و$ عنصراً في $ح^*$ حسب خاصية الإغلاق. نعلم أن لكل $س * س$ في $س$ يكون:

من تعريف العملية $= (و . هـ) (*س) = و (*س) . هـ (*س)$

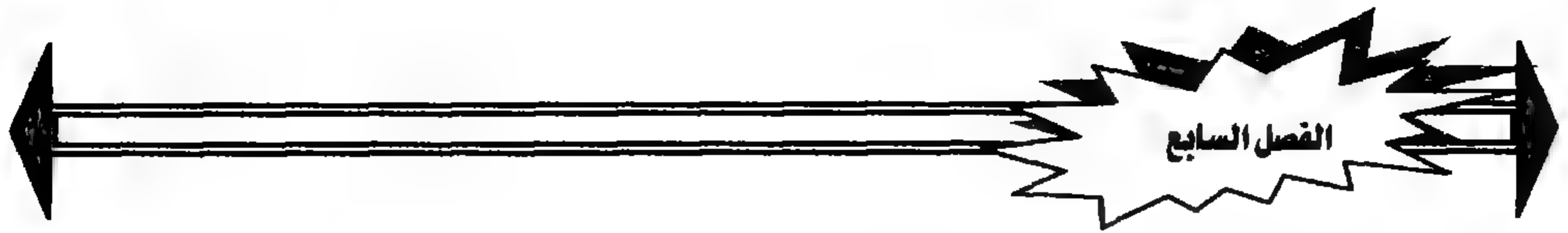
من خواص الأعداد الحقيقية $= هـ (*س) . و (*س)$

من تعريف العملية $(هـ . و) (*س)$

إذا $و . هـ = هـ . و$ وهذا يثبت الخاصية التبديلية للعملية.

لذا فإن $(ح^*, ٠)$ يكون نصف زمرة تبديلية مع العنصر المحايد $ل^*$.





نظرية ٢-١٣: لتكن العمليتين $+$ ، \cdot بين كل عنصرين من المجموعة H^*

بحيث

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \text{ لكل } a, b, c \text{ في } H^*.$$

$$(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot b \text{ لكل } a, b, c \text{ في } H^*.$$

فإن $(H^*, +, \cdot)$ تكون حلقة إبدالية تحتوي على العنصر المحايد.

البرهان:

حسب النظرية ٢-١١ $(H^*, +)$ زمرة تبديلية، وحسب النظرية ٢-١٢

يكون $(H^*, +)$ نصف زمرة تبديلية مع العنصر المحايد. فلتكمله البرهان نحتاج

إلى برهان خاصية التوزيع فقط أي أن $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ لكل $a, b, c \in H^*$ في المجموعة H^* .

بما أن $a \cdot b, a \cdot c \in H^*$ عناصر في H^* فيكون أيضاً كل من $a \cdot b, a \cdot c$

$+ (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot b) + (a \cdot c) \cdot c$ عنصر في H^* لكل $a, b, c \in H^*$ يكون:

من تعريف العملية $\Leftarrow (a \cdot (b + c)) = ((a \cdot b) + (a \cdot c)) \cdot c$ $(a \cdot b) + (a \cdot c) \cdot c$ $(a \cdot b) + (a \cdot c) \cdot c$

من تعريف العملية $\Leftarrow (a \cdot (b + c)) = ((a \cdot b) + (a \cdot c)) \cdot c$ $(a \cdot b) + (a \cdot c) \cdot c$

من خواص الأعداد الحقيقية $\Leftarrow (a \cdot (b + c)) = ((a \cdot b) + (a \cdot c)) \cdot c$ $(a \cdot b) + (a \cdot c) \cdot c$ $(a \cdot b) + (a \cdot c) \cdot c$

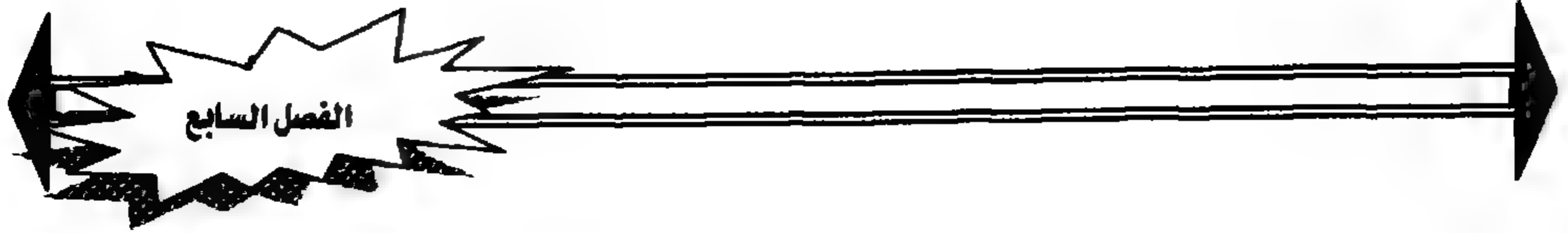
من تعريف العملية $\Leftarrow (a \cdot (b + c)) = ((a \cdot b) + (a \cdot c)) \cdot c$ $(a \cdot b) + (a \cdot c) \cdot c$

من تعريف العملية $\Leftarrow (a \cdot (b + c)) = ((a \cdot b) + (a \cdot c)) \cdot c$ $(a \cdot b) + (a \cdot c) \cdot c$

وبهذا يكون $(H^*, +, \cdot)$ حلقة تبديلية وتحتوي على العنصر المحايد

وهو 1 .





تعريف ٢-١٤: ليكن R^* عنصراً في المجموعة H^* بحيث $R^*(s) = R^*$ لكل $s \in S$ فنقول أن $R^* : S \rightarrow H^*$ دالة عددية ثابتة Constant Function.

تكون الدالة $L^* : S \rightarrow H^*$ دالة عددية ثابتة، والدالة $W^* : S \rightarrow H^*$ دالة عددية ثابتة.

نظرية ٢-١٥:

H^* يكون فضاء متجهات فوق حقل الأعداد الحقيقية.

البرهان: نعي أن H^* يكون فضاء متجهات Vector Space فوق حقل الأعداد الحقيقية H^* بأن $(+, \cdot)$ زمرة تبديلية، وتوجد عملية الضرب (تدعى الضرب المقياسي Scadar product) والمعرفة كما يلي $R^* \cdot Q^*$ في المجموعة H^* بحيث R^* عدد حقيقي و Q^* في H^* وان $(R^* \cdot Q^*) (s) = R^* \cdot Q^*(s)$.

(الطرف الأيمن عملية ضرب أعداد حقيقية). وتحقق شروط معينة والتي ستبرهن تحقيقها مباشرة، لكل $s \in S$ يكون $R^* \cdot (Q^* + H^*) = (R^* \cdot Q^*) + (R^* \cdot H^*)$.

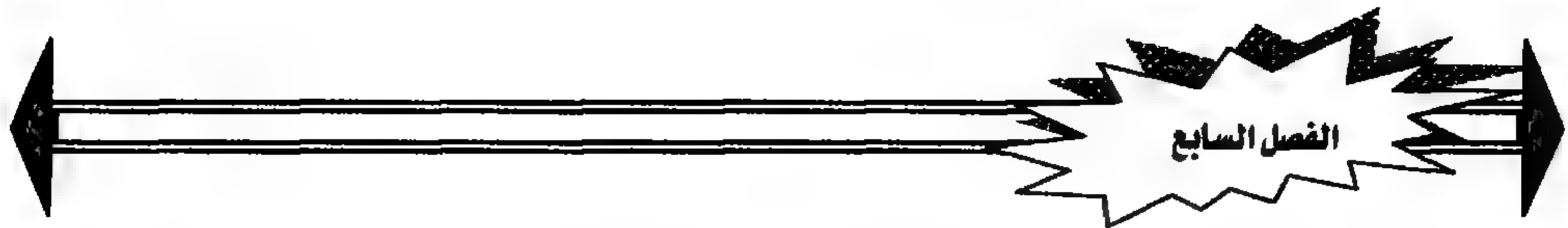
$$R^* \cdot (Q^* + H^*) = (R^* \cdot Q^*) + (R^* \cdot H^*) = (R^* \cdot Q^* + R^* \cdot H^*) = (R^* \cdot (Q^* + H^*))$$

إذاً (١) $R^* \cdot (Q^* + H^*) = (R^* \cdot Q^*) + (R^* \cdot H^*)$ لكل $Q^*, H^* \in H^*$ لكل $s \in S$

$$\begin{aligned} (r \cdot v) s + (v \cdot s) &= \\ (r \cdot v + v \cdot s) s &= \end{aligned}$$
$$r^* = (f - v) s^* = (f) s^*.$$

إذاً (٤) ١. $\forall = \forall$ لكل $\forall \in \mathcal{H}$ ، فإذا ضرب القياسي يحقق الشروط (١)، (٤) وبهذا يتم البرهان إن العملية الثنائية في الحلقة $(\mathcal{H}, +, \cdot)$ ستكون لها نفس الخاصية للعملية الثنائية في الفضاء المتجهات لأن $\mathcal{R}^* \cdot \mathcal{R}^* = \mathcal{R}^*$. وذلك لأن $(\mathcal{R}^* \cdot \mathcal{R}^*) = (\mathcal{R}^*)$ ، $\mathcal{R}^* = (\mathcal{R}^*)$ ، $\mathcal{R}^* = (\mathcal{R}^*)$.
 $\mathcal{R}^* = (\mathcal{R}^*) = (\mathcal{R}^* \cdot \mathcal{R}^*)$ لكل $\mathcal{R}^* \in \mathcal{H}$

ملاحظة: شاهدنا في النظريتين ٢-١١، ٢-١٢ إن جمع وطرح وضرب الدوال يتم عندما تكون مجالاتها نفس المجموعة الجزئية، والآن سنوضح جمع



ثالثاً: يكون مجموع $و + هـ$ التي هي مجموع تحديد $و$ و $هـ$ على المجموعة $أ$ فبذلك

$$و + هـ = أ \leftarrow ح \text{ بحيث}$$

$$(و + هـ) (*س) = ق(*س) + هـ(*س) = س(*س) + س(*س) = ٢(*س) \text{ لكل } س*$$

$$\text{في } أ = \{س* : ٠ \leq س* \leq ٢\}$$

مثال (٢): لتكن $هـ : س \leftarrow ح$ بحيث $و(*س) = س* + ٢$ لكل $س*$ في

$$س = \{س* : ١ - س* \leq س* \leq ٤\} \text{ ولتكن } و : س \leftarrow ح \text{ بحيث}$$

$$و(*س) = س* - ٢ \text{ لكل } س* \text{ في } ص = \{س* : -٤ \leq س* \leq ١\}.$$

ولإيجاد ضرب هاتين الدالتين نتبع الخطوات التالية:

أولاً:

$$س \cap ص = \{س* : ١ - س* \leq س* \leq ٤\} \cap \{س* : -٤ \leq س* \leq ١\}$$

$$= \{س* : ١ - س* \leq س* \leq ١\}$$

ثانياً: $و . هـ : أ \leftarrow ح$ بحيث:

$$(و . هـ) (*س) = و(*س) . هـ(*س) = (س* + ٢) . (س* - ٢) = (س* - ٢) (س* + ٢)$$

$$س* - ٤ \text{ لكل } س* \text{ في } أ = \{س* : ١ - س* \leq س* \leq ١\}.$$

أما تقسيم دالتين فالعملية فيها بعض المحاذير، ويجب معاملتها معاملة

خاصة.

تعريف ٢-١٧:

لتكن كل من $و : س \leftarrow ح$ و $هـ : ص \leftarrow ح$ دالة عددية، ولتكن

المجموعة



$A = S \cap V = \{s \in S : s \cap V = \emptyset\}$ مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية، فيقال للدالة، والتي نرمز لها كاتفاق لفظي $\frac{V}{H} : A \leftarrow H$ بحيث $\frac{V}{H}(s) = \frac{V(s)}{H(s)}$ لكل $s \in A$ ، تقسيم الدالة V على H .

مثال (٣):

لتكن $V : S \leftarrow H$ دالة عددية بحيث $V(s) = 1 + s$ لكل $s \in S$

$= \{1 \leq s \leq 3\}$ ولتكن $H : S \leftarrow V$ دالة عددية بحيث $H(s) = s - 1$ لكل $s \in S$ في S في $V = \{s : 0 \leq s \leq 4\}$ ، فما هي الدالة $\frac{V}{H}$

أولاً: $S \cap V = \{s : 1 \leq s \leq 3\} \cap \{s : 0 \leq s \leq 4\} =$

$$\{s : 1 \leq s \leq 3\} =$$

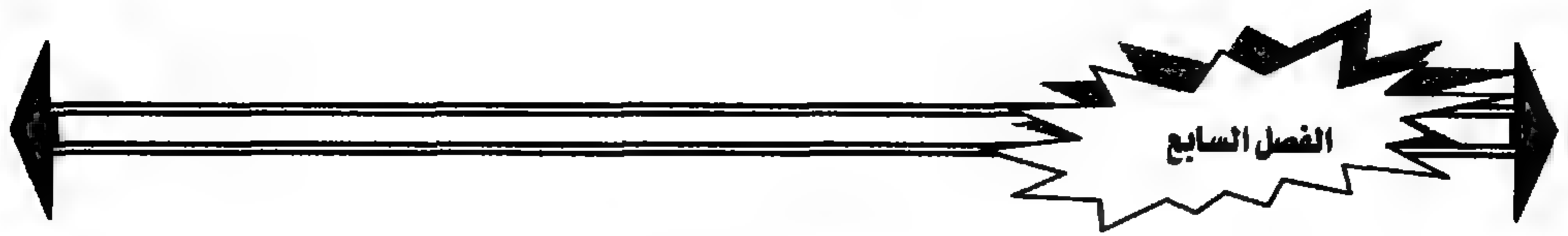
ثانياً: $H(s) = s - 1 = 0 \iff s = 1$

ثالثاً: $A = S \cap V - \{s : s = 1\} =$

$$\{1\} - \{s : 1 \leq s \leq 3\} =$$

رابعاً: $\frac{V}{H} : A \leftarrow H$ $\frac{V}{H}(s) = \frac{V(s)}{H(s)} = \frac{1+s}{s-1}$

لكل $s \in A$ في المجموعة $A = \{s : 1 \leq s \leq 3\}$



تمارين

١- لتكن u : $s \leftarrow$ ح دالة بحيث $u(s^*) = \frac{1}{s^* - 1}$ لكل s^* في

$$s = \{1\} - \text{ح}$$

أوجد ما يلي:

$$\text{أ- } u(0) \quad \text{ب- } u(1)$$

$$\text{ج- } u\left(1 + \frac{1}{3}\right) \quad \text{د- } u(0,999)$$

$$\text{هـ- } u(0,001) \quad \text{و- } u\left(u\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

٢- لتكن u : $\text{ح} \leftarrow$ ح بحيث $u(s^*) = s^* + s^* + 3$ لكل s^* في ح

أوجد ما يلي:

$$\text{أ} \quad u(1) \quad \text{ب- } u(1 + \text{هـ})$$

$$\text{ج- } u(\text{هـ} + 1) - u(1)$$

$$\text{د} \quad \frac{u(1) - (\text{هـ} + 1)}{\text{هـ}}, \text{ عندما } \text{هـ} \neq 0$$

٣- صنع صندوق على شكل متوازي المستطيلات مفتوح من الأعلى من صفيحة معدن مستطيلة الشكل وذلك بقطع مربعات من زواياه الأربع وثني الجوانب إلى أعلى. أوجد العلاقة بين طول المربع وحجم هذا متوازي المستطيلات.



٤- أسطوانة دائرية الشكل قائمة رسمت داخل مخروط دائري ارتفاعه هـ ونصف قطره ر بحيث قاعدة الأسطوانة تكون على قاعدة المخروط ومحيط القاعدة العليا للأسطوانة يقع على سطح المخروط. أوجد علاقة نصف قطر الأسطوانة بحجمها.

٥- لتكن $U: S \leftarrow H$ دالة وأن A و B مجموعتين غير خاليتين فبرهن على أن:

$$1- U(A \cap B) = U(A) \cup U(B) \quad (A \cap B) - U(B) \supset U(A) \quad (B - U(B))$$

$$(B \cap U(A)) \supset U(A) \cap U(B)$$

$$(D) \text{ إذا كان } B \supset A \text{ فإن } U(A) \supset U(B) \text{ حيث أن } U(A) = \{U(S)^*\} \in V: S^* \in A\}$$

$$6- \text{ لتكن } U: S \leftarrow H \text{ بحيث أن } U(S)^* = \frac{1}{1+S^*}$$

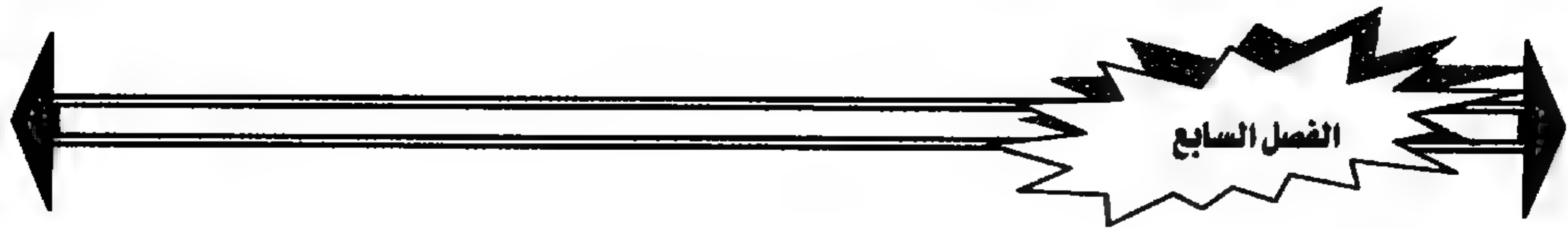
$$\text{لكل } S^* \text{ في } S = \{S^*: S^* \geq 0\}.$$

$$\text{ولتكن } H: V \leftarrow H \text{ دالة بحيث أن } H(S^*) = \sqrt{2-S^*} \text{ لكل } S^* \text{ في } S$$

في S

$$= \{S^*: S^* \geq 2\}$$

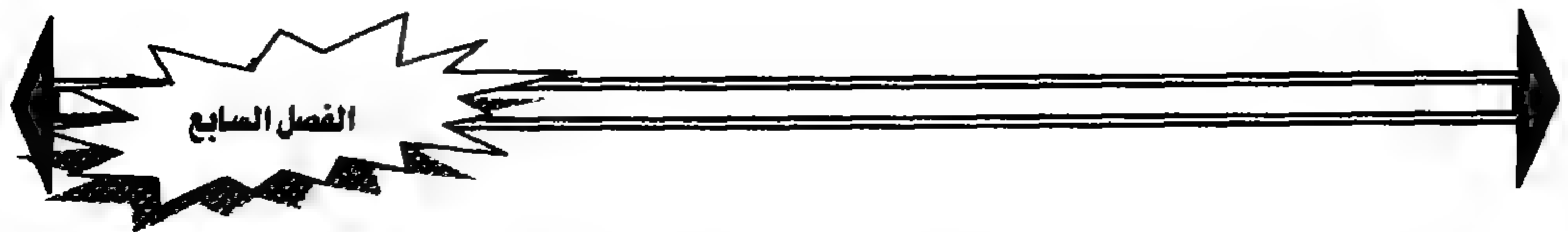
$$\text{أوجد كل مما يلي: } \frac{U}{H}, U.H, U-H, U+H.$$



٢-٥ مخطط الدالة Graph of a function

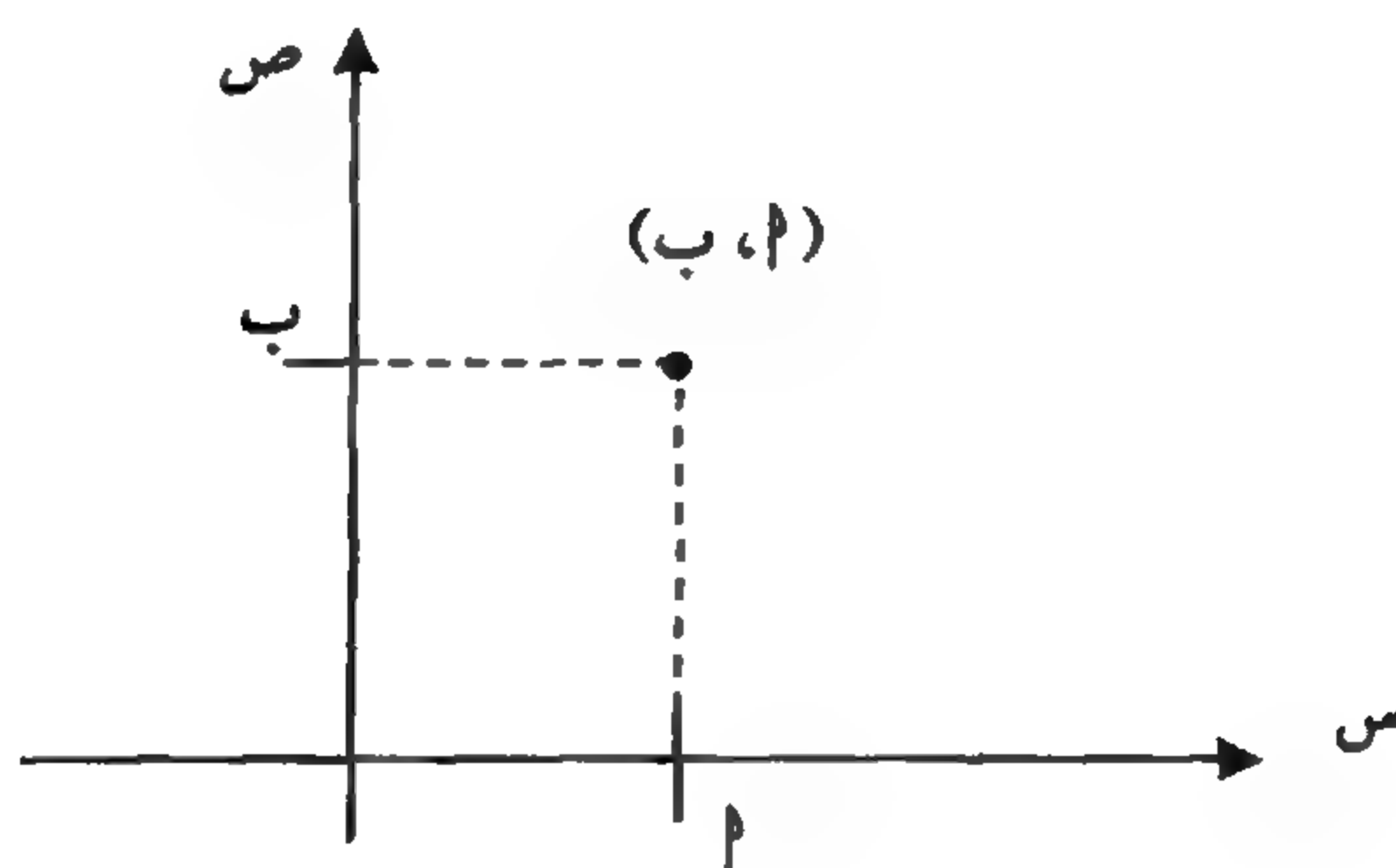
تعلمنا في الفصل الأول كيفية تمثيل كافة الأعداد الحقيقية على مستقيم، أي أن هناك تقابل بين نقاط المستقيم (في المفهوم الإقليدي) وبين مجموعة الأعداد الحقيقية، أي كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على مستقيم وكل نقطة على مستقيم تمثل بعدد حقيقي، غير أن هناك في نظام المجموعة ضرب مجموعتين أي مجموعة الأزواج المرتبة للمجموعتين، ولو كانت كل من هاتين المجموعتين هي مجموعة الأعداد الحقيقية لذا فإن $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ يمثل مجموعة الأزواج المرتبة، حيث إحداثي كل زوج مرتب هو عدد حقيقي. وعندما نستخدم المفاهيم الهندسية الإقليدية فإن المستوى سيكون التمثيل في هذه المرة، حيث كل زوج مرتب يمثل بنقطة في المستوى الإقليدي وكل نقطة في هذا المستوى يمثل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية أي هناك تقابل بين مجموعة النقاط التي تكون المستوى الإقليدي ومجموعة الأزواج المرتبة بين الأعداد الحقيقية. وكما تعلمنا عند وضع النقاط لهذا التقابل يجب أن تكون هناك طريقة معينة. والطريقة هي أن نثبت مستقيم معين في المستوى ويدعى بمحور s ونعلم أن نقاط هذا المستقيم في حالة تقابل مع مجموعة الأعداد الحقيقية، لذا فعند أخذ أي زوج مرتب مثل (p, b) فإننا نستطيع تعيين نقطة على محور s بحيث تقابل العدد p نعلم أن العدد الحقيقي له مكان كنقطة على محور s ومن الحالات الإقليدية يوجد مستقيم عمود واحد على محور s في النقطة التي تقابل العدد b ، ويدعى هذا المستقيم بمحور v . وكما نعلم يوجد تقابل بين نقاط هذا المستقيم ومجموعة الأعداد الحقيقية وعند اعتبار نقطة تقاطع المحورين والتي تدعى نقطة الأصل بأنها النقطة على محور v التي تقابل العدد b ، لذا لتعيين النقطة b التي تقابل العدد b على هذا المستقيم





وبإقامة مستقيم عمود على محور s من النقطة التي تتعين بالعدد a ، وإقامة مستقيم عمود على محور s من النقطة التي تتعين بالعدد b فإن النقطة التي تتعين بتقاطع هذين العمودين هي النقطة المناظرة لهذا الزوج المرتب، وكما تعلمنا أن النقاط والمستقيمات والمستوى يمكن تمثيلها هندسياً، لذا فإن النقطة التي تقابل المرتب (a, b) ستمثل كما في الشكل ٢-٣.

كما يدعى هذا المستوى بالمستوى s ص فهناك تقابل بين $s \times s$ ونقاط المستوى s ص



لتكن $U: A \rightarrow B$ دالة عددية لذا فإن U مجموعة جزئية من $A \times B$ والتي هي مجموعة جزئية من $B \times A$ وبما أن هناك تقابل بين الأزواج المرتبة ونقاط المستوى s ص لذا فإن المجموعة الجزئية U ستعين مجموعة جزئية من نقاط المستوى s ص ومجموعة هذه النقاط تسمى بالمخطط الديكارتي للدالة أو مخطط الدالة Graph of a function. لذلك فإن كل زوج مرتب من الأعداد والذي يكون عنصراً في بيان الدالة يكون من النوع $(s, U(s))$ وهذا الزوج المرتب يعين نقطة واحدة في المستوى s ص كما أن هناك بعض الخواص المساعدة التي تعطي فكرة معينة لتوضيح مخطط الدالة.

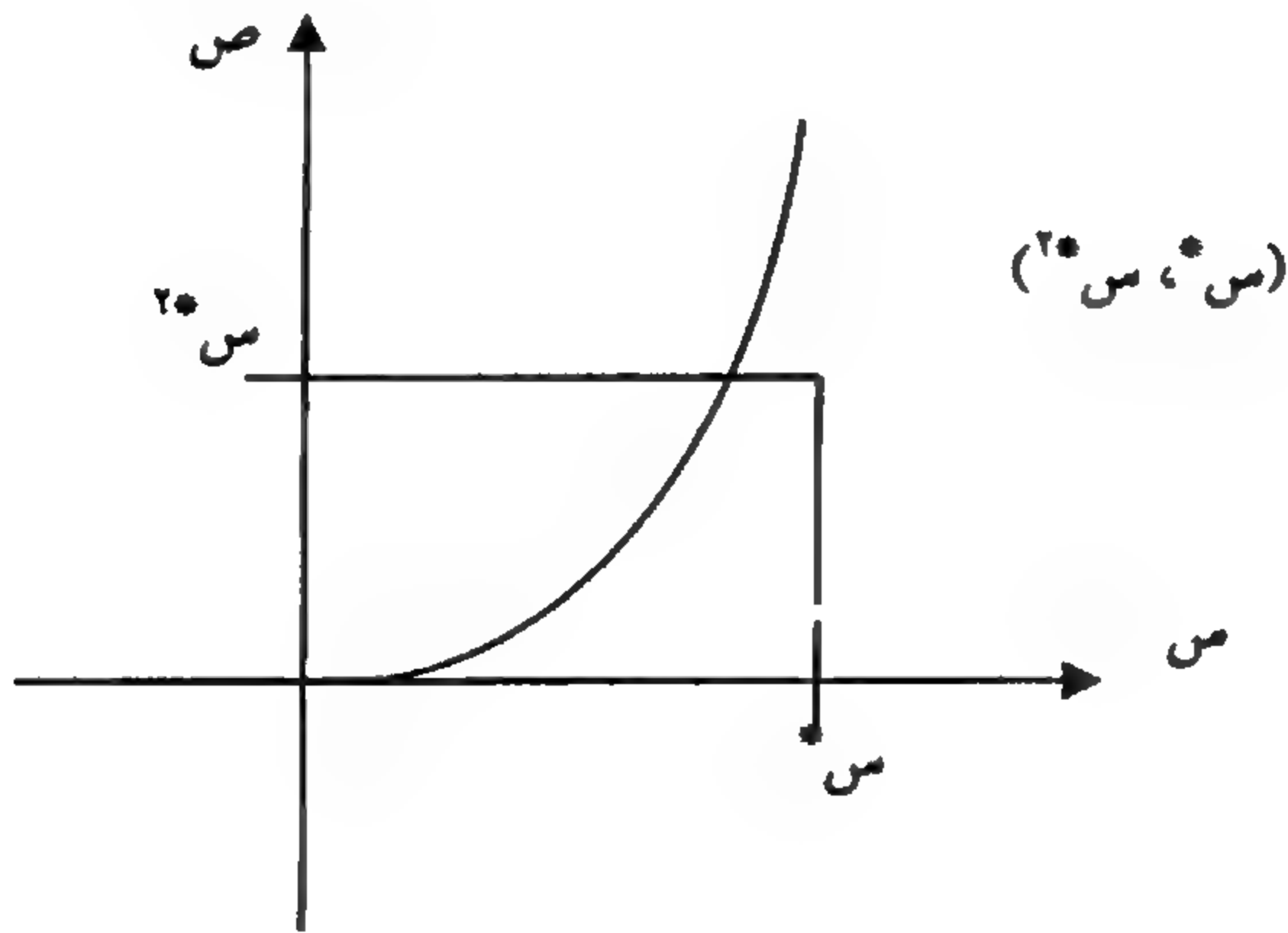


تعريف ٢-١٨:

لتكن $U: S \leftarrow C$ دالة عددية وأن S مجموعة جزئية تحتوي على الأقل على عددين، فيقال أن U مطردة بالتزايد $U(s_1) > U(s_2)$ لكل $s_1 > s_2$ في S ويقال أن U مطردة بالتناقص $U(s_1) > U(s_2)$ كل $\{s: s \leq s_1\}$ في S .

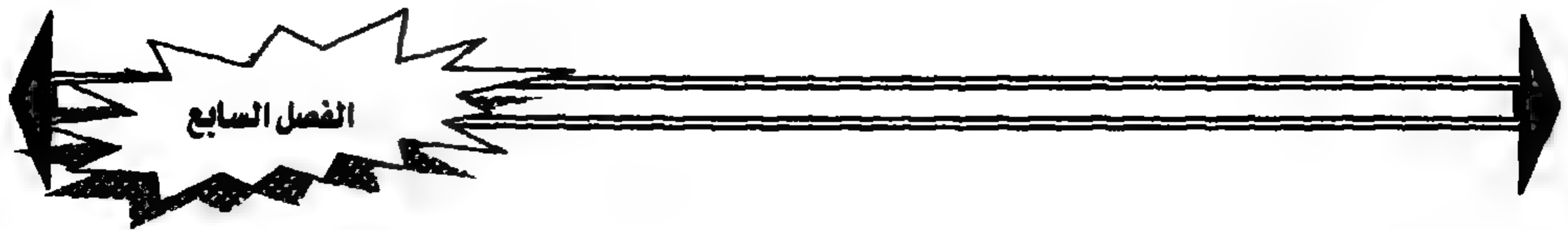
مثال: لتكن $U: S \leftarrow C$ دالة بحيث أن $U(s) = (s_2)$ لكل في $S = \{s: s \leq s_1\}$ نأخذ عددين s_1, s_2 في S بحيث $s_1 > s_2$ فإن $s_1 > s_2$.

فعليه $U(s_1) > U(s_2)$ لذا فإن هذه الدالة مطردة في التزايد والزوج المرتب (s, s^2) يكون عنصراً في بيان الدالة بكل s في S ويمكن تمثيلها بنقطة في مستوى S فيكون المخطط الديكارتي لهذه الدالة كما في الشكل ٢-٤.

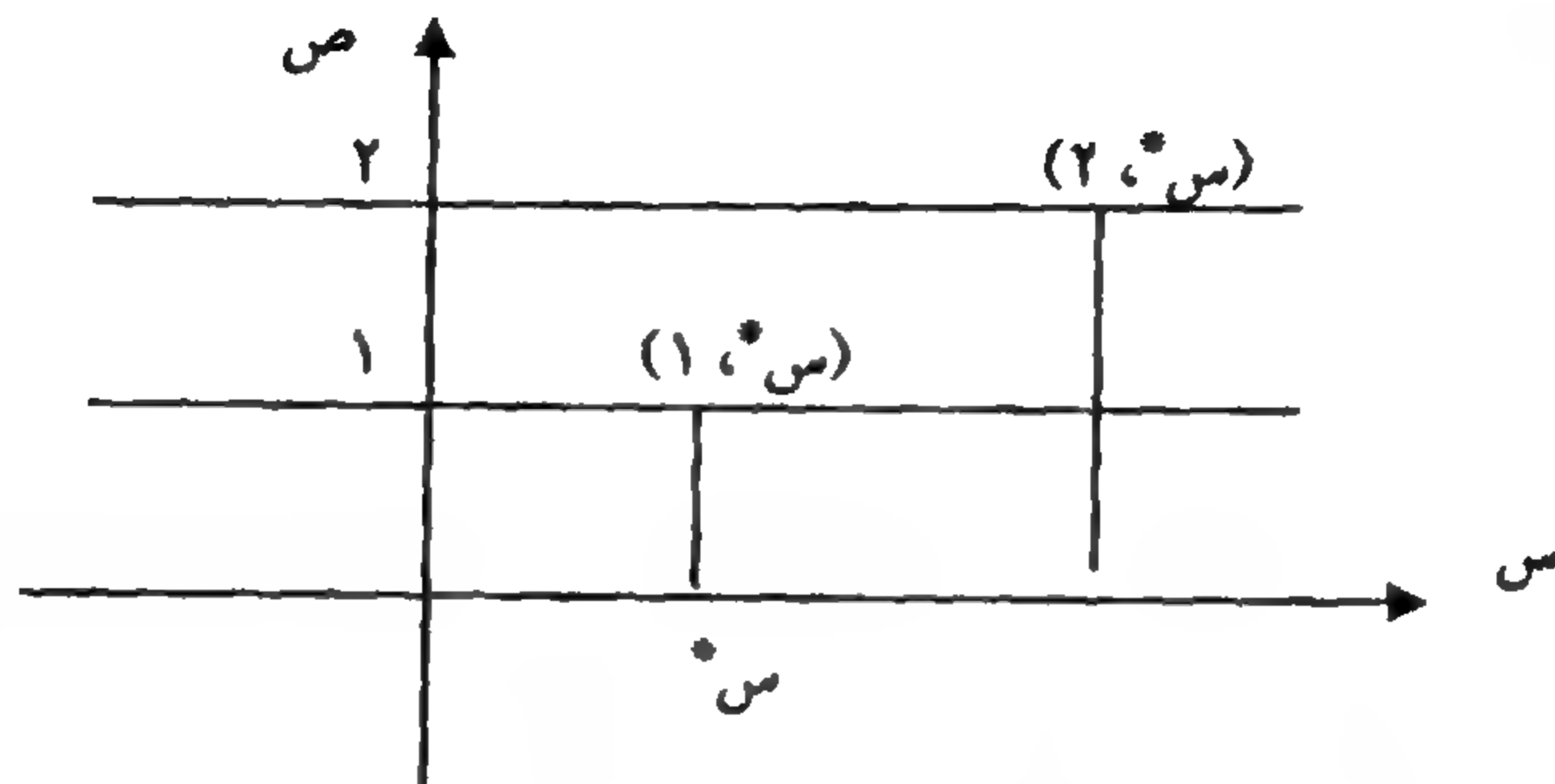


مثال: لتكن $U: S \leftarrow C$ دالة عددية بحيث أن $U(s) =$

$$\left. \begin{array}{l} 2: s \text{ عدد نسبي} \\ 2: s \text{ عدد غير نسبي} \end{array} \right\} \text{ لكل } s \in S. C$$



لو أخذنا أي عددين s_1^* ، s_2^* في \mathcal{H} بحيث أن $s_1^* > s_2^*$ فلو كان s_1^* عدد نسبي و s_2^* عدد نسبي فإن $u(s_1^*) = u(s_2^*) = 1$ وبذلك فإن هذه الدالة غير مطردة في التزايد ولا النقصان. والمخطط الديكارتي لهذه الدالة يكون كما في الشكل ٢-٦.



هناك طريقة مساعدة في رسم المخططات الديكارتي لمجموع وطرح وضرب دالتين ويمكن القارئ من رسم مخططاتها بصورة تقريبية بمعرفة مخططات دوال معينة.

مثال: لتكن $u: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ دالة بحيث أن $u(s) = s + 1$ لكل $s^* \in \mathcal{H}$ في $\mathcal{H} = \{s^* : s^* \geq 0\}$

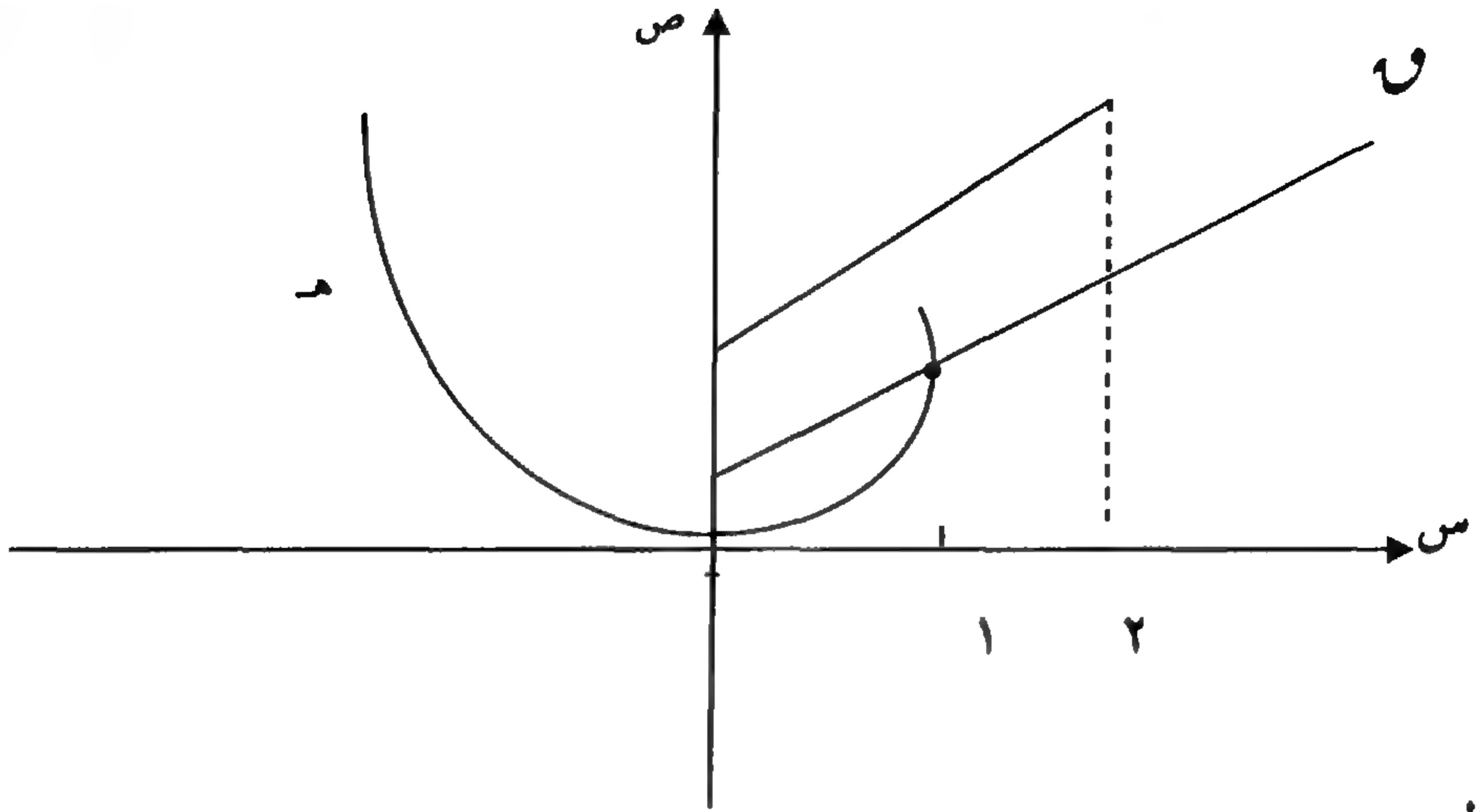
ولتكن $h: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ دالة بحيث أن $h(s) = s^2$ لكل $s^* \in \mathcal{H}$ في $\mathcal{H} = \{s^* : s^* \geq 0\}$ نعلم أن $(u + h): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ دالة بحيث أن:

$$1 = \{s^* : 0 \leq s^* \leq 2\} \text{ ولكل } s^* \in \mathcal{H} \text{ نجد أن } (u + h)(s^*) =$$

$$= u(s^*) + h(s^*) =$$

$$= s^* + s^{*2} + 1$$

ولرسم هذه الدالة نأخذ s^* في \mathcal{H} ونجمع القيمتين $u(s^*)$ و $h(s^*)$ كما في الشكل ٢-٧.



مثال:

لتكن $و: س \leftarrow ح$ دالة بحيث أن $و(س) = ح(س)$ لكل $س^*$ في $س = \{س^*: س^* \geq 0\}$ ولتكن $هـ: ص \leftarrow ح$ دالة بحيث أن:

$هـ(س) = \left\{ \begin{array}{l} ١: س^* \text{ عدد نسبي} \\ ٢: س^* \text{ عدد غير نسبي} \end{array} \right\}$ لكل $س^*$ في $ص =$ مجموعة

الأعداد الحقيقية.

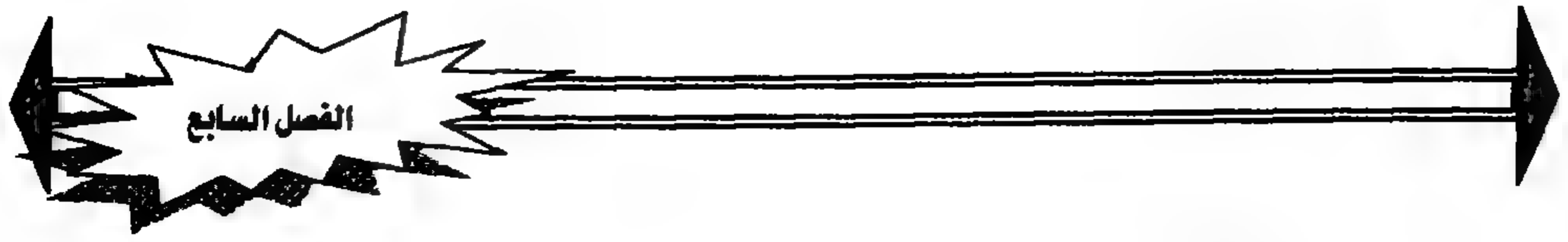
ولرسم مخطط الدالة $و$. هـ: $س \leftarrow ح$ حيث $س = \{س^*: س^* \geq 0\}$.
بحيث أن

$$(و.هـ)(س) = (و(س) = هـ(س)) = (س)$$

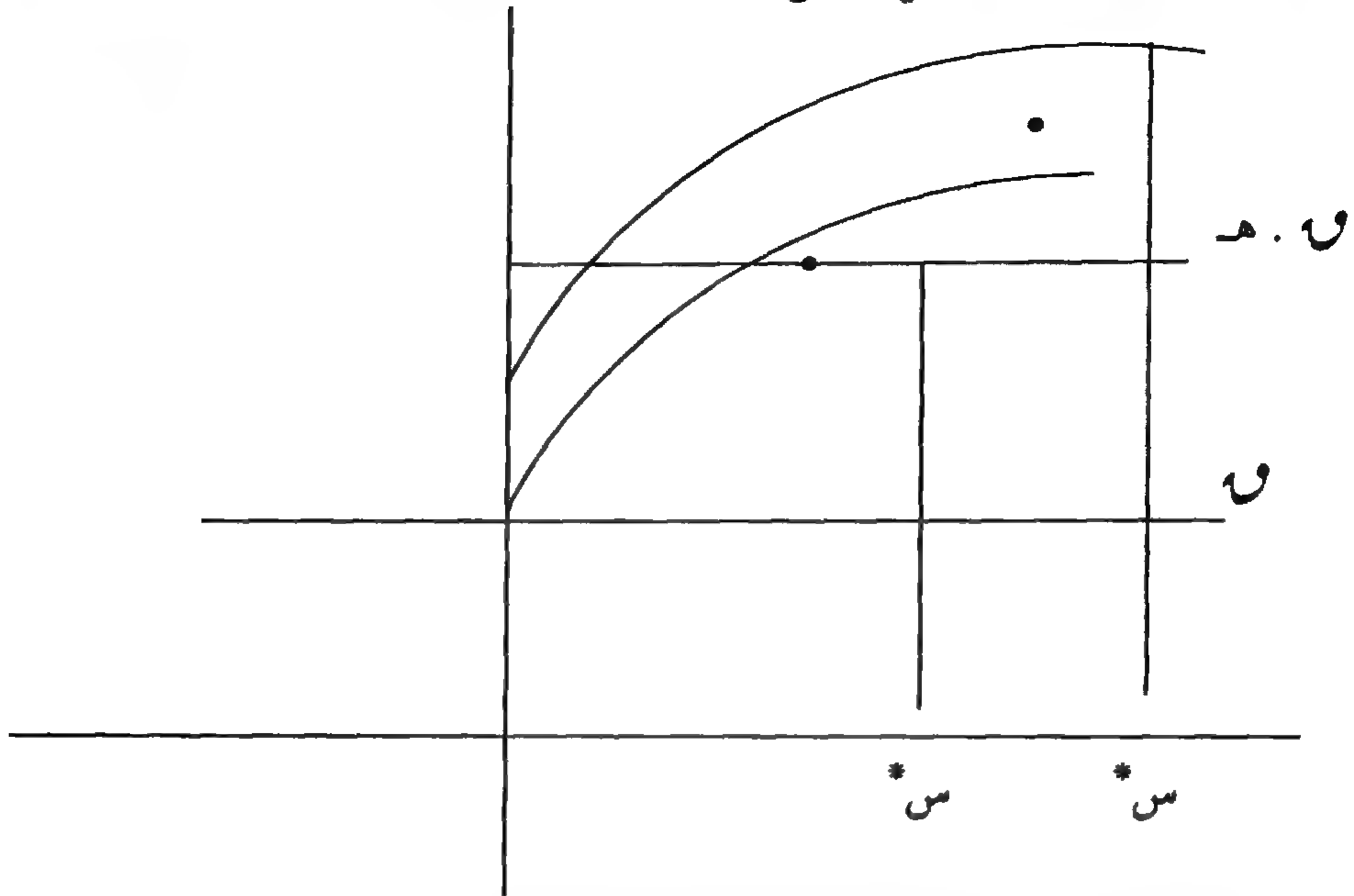
$$\left\{ \begin{array}{l} ١: س^* \text{ عدد نسبي} \\ ٢: س^* \text{ عدد غير نسبي} \end{array} \right\} \cdot (س) = (س)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ١: س^* \text{ عدد نسبي} \\ ٢: س^* \text{ عدد غير نسبي} \end{array} \right\} = (و.هـ)(س) = (س)$$

كل $س^*$ في $س$



فيكون المخطط كما في شكل ٧-٢.



(٦-٣) دالة التركيب Composite Function

نظرية ١٩-٢:

لتكن $h \Rightarrow f$ ولتكن $u \Rightarrow v$ فيوجد عنصر h^* في f بحيث أن

$$h^*(s) = (h(u(s))) \text{ لكل } s \in s.$$

البرهان: ليكن $u \Rightarrow v$ فإن $u: s \leftarrow v$ دالة، وليكن $h \Rightarrow f$

فإن $h: v \leftarrow f$ دالة لكل s^* في s توجد قيمة واحدة إلى u في s^*

وهي $u(s^*)$ في v الذي هو منطلق h لذا يجب أن تكون هناك قيمة إلى h

في $u(s^*)$ وهي $h(u(s^*))$. في v فعليه

$$f \times s \supset \{s \ni s^* : ((s^*) \cup h) = h^*\}$$

تكون علاقة من س إلى ف غير أن لكل س* في س يظهر كإحداثي أول

الزوج مرتب واحد فقط، لذا ستكون هذه العلاقة دالة، إذا $هـ^* \ni ف^س$ بحيث
 $هـ^*(س^*) = هـ(و(س^*))$ لكل $س^* \ni س$ ومن تساوي الدوال فهناك دالة
 واحدة في $ف^س$ لها هذه الخاصية.

تعريف ٢-٢٠: يرمز إلى ه* في النظرية السابقة بالرمز ه٠ وبذلك

يكون (هـ و) (س*) = هـ (و) (س*) لكل س* في س حيث هـ \Rightarrow ح و \Rightarrow ص

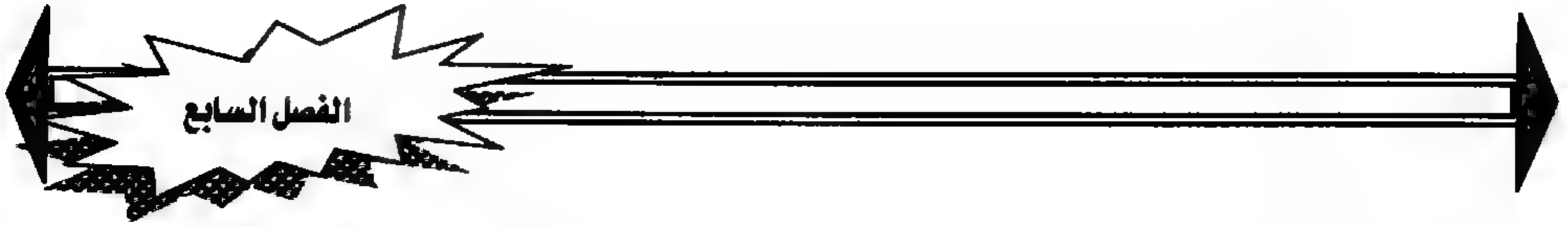
في التعريف ٢-٢٠ لو رمزنا إلى هـ* إلى هـ ° و لكل (هـ، و) $\ni \text{ف} \times \text{ص}$
 $\text{ص}، \text{فإن و} : \text{ف} \times \text{ص} \leftarrow \text{ف تكون دالة.}$

بجيث و (هـ و) (س*) = هـ (و) (س*) لكل س* في س، ولتوضيح
هذا المفهوم نأخذ المثال التالي:

مثال:

لتكن $v \in \mathcal{V}$ أي لتكن $v : S \rightarrow \mathcal{V}$ ← ص دالة بحيث أن $v(s) = s$
 $\{s : s \in S \text{ لكل } s \in S \text{ في } S = \{s : s \in S \text{ وأن } s = \{s : s \in S\} = \{s : s \in S\}$
 ولتكن $h \in \mathcal{H}$ أي لتكن

هـ : ص ← ح دالة بحيث أن هـ (س*) = س* + الكل س* في ص =
 {س* : س* ≤ ٠} مجموعة الاعداد الحقيقية فان الدالة ، هـ ٠ و او و (هـ، و)



ستكون على هذا الاساس $هـ \circ و : ص \leftarrow ح$ بحيث ان $(هـ \circ و)(س^*) =$
 $هـ(و(س^*)) = هـ(س^*) = (س^*)^2 + 1 = 1 + س^* =$ لكل $س^*$ في $س$

مثال آخر: لتكن $و \ni \overset{\cdot}{ص}$ وأن $س = \{س^* : 0 \leq س^* \leq 2\}$ و $ص =$
 $\{س^* : 0 \leq س^* \leq 4\}$ وأن $و(س^*) = س^*$ لكل $س^* \ni س$

ولتكن $هـ \ni \overset{\cdot}{ح}$ بحيث $هـ(س^*) = 4 - س^*$ لكل $س^* \ni ص$ وأن العنصر

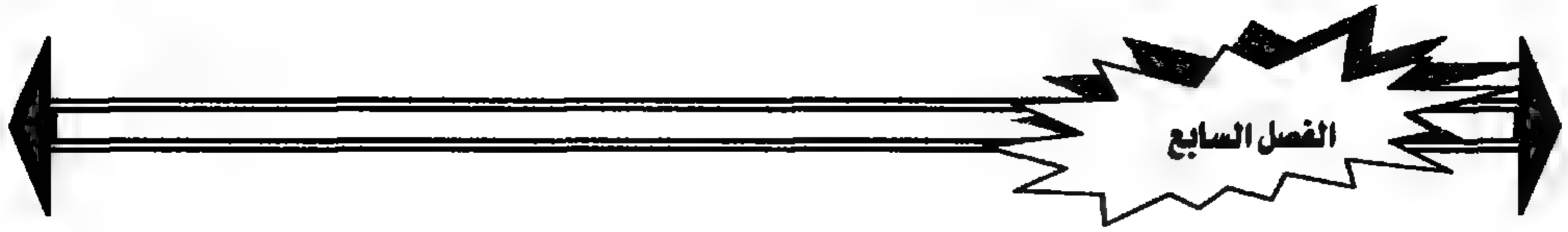
$هـ \circ و$ في المجموعة $\overset{\cdot}{ح}$ سيكون $(هـ \circ و)(س^*) = هـ(و(س^*)) = هـ(س^*) = 4 - س^*$
 $= 4 - س^*$ لكل $س^*$ في $س$.

والآن يمكن صياغة التعريف ٢-١٩ بطريقة توضيحية ونقول:

إذا كان $س \xrightarrow{و} ص \xrightarrow{ح} و$ فيوجد $\overset{\cdot}{و} \xrightarrow{و} و$ بحيث أن
 $س \xrightarrow{و} ص \xrightarrow{و} و$

$\overset{\cdot}{و} \xrightarrow{و} و$ حيث الأسهم إشارة للدوال

لو تفحصنا البرهان السابق الذي سبق التعريف فنجد أن $ص$ كمدى
بالنسبة لهذا التعريف لا يلعب دوراً مهماً لأن $(هـ \circ و)(س^*) = هـ(و(س^*)) =$
حتى يكون الطرف الأيمن من هذه المساواة عدداً معرفاً يجب أن يكون $و(س^*)$
حتى يكون الطرف الأيمن من هذه المساواة عدداً معرفاً يجب أن يكون $و(س^*)$
في مجال $هـ$ ، ونعلم أن $(س^*)$ هو عدد يوجد دائماً في مدى $و$ لذا فإن مدى $و$
هو الذي يلعب الدور الرئيس وليس مداها. لذا فنستطيع أن نستنتج مما سبق،
ونحصل على نتائج أفضل، ونقول:



نتيجة ٢-٢١: لتكن $U \ni M \ni W \ni F$ أي أن $U : S \leftarrow M$ دالة، وأن F تكون

هـ: $S \leftarrow F$ دالة بحيث $U(S) \supseteq V$ فتوجد دالة $H : U \rightarrow S$ بحيث أن $(H \circ U)(S) = (U \circ H)(S)$ لكل S في U .

مثال: لتوضيح هذه الفكرة نقول، لتكن $U : S \leftarrow H$ بحيث أن $U(S) = S - 1$ لكل S في $U = \{S : S > 2\}$ فمن الواضح أن مدى هذه الدالة ستكون المجموعة

$$U(S) = \{S : S > 1\}.$$

ولو كانت $H : S \leftarrow H$ بحيث أن $V = \{S : S \neq 1\}$ ولكل

$$S \ni V \text{ كانت } H(S) = \frac{1}{1-S}$$

من الواضح أن كل عدد حقيقي في $U(S)$ ينتمي إلى V وبذلك فإن $U(S) \supseteq V$ فعليه توجد دالة بين S و H بحيث أن لكل S تكون قيمة هذه الدالة في S هو العدد $H(U(S))$ لأن $U(S)$ دائماً يكون في منطلق H لكل S في U

فعليه $H : U \rightarrow S$ دالة بحيث أن

$$H \circ U(S) = (U \circ H)(S) = H(S - 1) = \frac{1}{1 - (S - 1)} = \frac{1}{2 - S}$$

$$\frac{1}{2 - S} \text{ لكل } S \text{ في } U$$



لو استمرينا في دراسة دالة التركيب فنجد من الضروري توسيع هذا المفهوم إلى دوال عندما لا تحقق الشرط في النتيجة ٢-٢١ ولناخذ لأن أي دالتين عدديتين، ومن السهولة وضعها كما يلي

$\omega : s \leftarrow h \text{ و } h : s \leftarrow h$ دالتين، فلو كان $\omega(s) \supseteq h$ فإن من الواضح وجود الدالة $h : \omega \leftarrow h$ بحيث $(h \circ \omega)(s) = h(\omega(s))$ لكل s في s . لأن $\omega(s)$ يكون في منطلق h . والآن إن لم تكن $\omega(s) \supseteq h$ نأخذ المجموعة

$b = \omega(s) \cap h$ فتكون مجموعة جزئية من h نفترض الآن أن b مجموعة غير خالية ونأخذ المجموعة a في منطلق ω بحيث $a = \{s \in s : \omega(s) \cap b \neq \emptyset\}$

والآن نستطيع معرفة تحديد الدالة ω على b فنقول $\omega|_b : a \leftarrow h$

$h|_b : b \leftarrow h$ دالتين بحيث أن $\omega|_b = h|_b$ لكل $s \in a$.

فلو حللنا هاتين الدالتين لوجدنا أن مدى $\omega|_b$ وهو $\omega|_b(a)$ يكون

$$\omega|_b(a) = \{\omega(s) : s \in a\} = \{\omega(s) : s \in s, \omega(s) \cap b \neq \emptyset\} = \{\omega(s) : s \in s, \omega(s) \cap b \neq \emptyset\}$$

$$= \{\omega(s) : s \in s, \omega(s) \cap b \neq \emptyset\} = \{\omega(s) : s \in s, \omega(s) \cap b \neq \emptyset\}$$

$$= \{\omega(s) : s \in s, \omega(s) \cap b \neq \emptyset\} = \{\omega(s) : s \in s, \omega(s) \cap b \neq \emptyset\}$$

$$= \{\omega(s) : s \in s, \omega(s) \cap b \neq \emptyset\} = \{\omega(s) : s \in s, \omega(s) \cap b \neq \emptyset\}$$

$$= \{\omega(s) : s \in s, \omega(s) \cap b \neq \emptyset\} = \{\omega(s) : s \in s, \omega(s) \cap b \neq \emptyset\}$$

لذا فإن مدى \mathcal{U} يساوي منطلق \mathcal{H} وحسب تعريف ٢٠-١ تكون

$$(\mathcal{H} \circ \mathcal{U}) : \mathcal{A} \leftarrow \mathcal{C} \text{ دالة بحيث أن } (\mathcal{H} \circ \mathcal{U}) (\mathcal{S}^*) = \mathcal{H}$$

$$\mathcal{A} (\mathcal{U}) (\mathcal{S}^*) \text{ لكل } \mathcal{S}^* \text{ في } \mathcal{A}$$

إذاً $(\mathcal{H} \circ \mathcal{U}) (\mathcal{S}^*) = \mathcal{H} \circ \mathcal{U} (\mathcal{S}^*)$

لأن $\mathcal{U} (\mathcal{S}^*) \ni \mathcal{B} \iff \mathcal{H} (\mathcal{U} (\mathcal{S}^*))$

وسيكون هذا برهاناً للنظرية الآتية:

نظرية ٢-٢٢:

لتكن $\mathcal{U} \ni \mathcal{C} \iff \mathcal{H} \ni \mathcal{C}$ بحيث أن $\mathcal{U} (\mathcal{S}) \cap \mathcal{V} = \emptyset \neq \mathcal{B}$

فإن $(\mathcal{H} \circ \mathcal{U}) : \mathcal{A} \leftarrow \mathcal{C}$ دالة حيث أن

$$(\mathcal{H} \circ \mathcal{U}) (\mathcal{S}^*) = \mathcal{H} (\mathcal{U} (\mathcal{S}^*)) \text{ لكل } \mathcal{S}^* \text{ في } \mathcal{A} = \{\mathcal{S}^* : \mathcal{U} (\mathcal{S}^*) \ni \mathcal{B}\}$$

تعريف ٢-٢٣: يقال للدالة $\mathcal{H} \circ \mathcal{U}$ في النظرية ٢-٢٢ تركيب الدالتين \mathcal{U} و \mathcal{H} ويرمز لها نفس الرمز $\mathcal{H} \circ \mathcal{U}$.

مثال: لتكن $\mathcal{U} (\mathcal{S}) = -\mathcal{S}$ عندما $\mathcal{U} : \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{C}$ لكل \mathcal{S}^* في \mathcal{S}

$$= \{\mathcal{S}^* : \mathcal{S}^* \geq 0\}$$

ولتكن $\mathcal{H} : \mathcal{V} \leftarrow \mathcal{C}$ دالة بحيث $\mathcal{H} (\mathcal{S}^*) = \overline{\mathcal{S}^*}$ لكل \mathcal{S}^* في \mathcal{V}

$$= \{\mathcal{S}^* : \mathcal{S}^* \leq 0\} \text{ أوجد } \mathcal{H} \circ \mathcal{U} ?$$

لإيجاد هذا التركيب نتبع الخطوات التالية:

١- إيجاد مدى الدالة U

$$U(s) = \{U(s) : \exists h : h \in C : s \in h\} = \{s : s \in C\} = \{s : s \geq 0\}$$

٢- إيجاد المجموعة B

$$B = \{U(s) : s \in C\} = \{s : s \geq 0\} = \{0\} \neq \Phi$$

٣- إيجاد المجموعة A

$$A = \{s : s \in C\} = \{s : s \geq 0\} = \{0\}$$

فعليه فإن $h = 0 : \{0\} \leftarrow C$ دالة بحيث $(h = 0)(s) = (s)$

$h = (s) : (h = 0)(s) = (s) = (s) \leftarrow C$ لكل $s \in \{0\}$.

وبذلك يكون مخطط هذه الدالة نقطة الأصل (نقطة تقاطع المحورين s و $U(s)$).

مثال: لتكن $U : C \leftarrow C$ دالة بحيث ان:

$$U(s) = \begin{cases} 1 : s \text{ عدد نسبي} \\ 1-s : s \text{ عدد غير نسبي} \end{cases} \text{ لكل } s \in C$$

ولتكن $h : C \leftarrow C$ دالة بحيث $h(s) = (1-s)$ لكل $s \in C$ في $C = \{s : s \geq 0\}$ ولإيجاد $h = 0$ نتبع الخطوات التالية:

$$1- \text{ إيجاد مدى الدالة } U(s) = \{U(s) : \exists h : h \in C\} = \{1, 1-s\}$$

إذا هـ* ((هـ.و)) (هـ*هـ).و وهذا برهان لخاصية التجميع.

لتكن $I \ni \hat{c}$ دالة ذاتية أي أن $I(s^*) = s^*$ لكل $s^* \in I$ ، إذاً لكل $s^* \in I$ يكون

$$(\varphi^*)_{\mathcal{M}} = ((\varphi^*)_{\mathcal{M}}) I = (\varphi^*)_{\mathcal{M}} (\varphi \circ I)$$

$$I = I \circ \mathcal{V} = \mathcal{V} \circ I \text{ فإن } \mathcal{V}(*_{\mathcal{S}}) = ((\mathcal{V}(*_{\mathcal{S}})I) = (*_{\mathcal{S}})(I \circ \mathcal{V})$$

وهذا يثبت وجود عنصر التحايد، وبهذا يكمل البرهان.

٢-٧: دوال خاصة Special Functions:

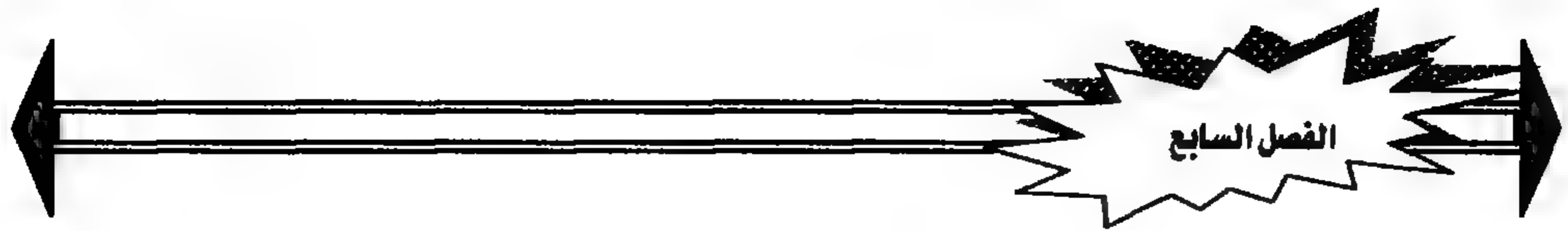
سوف يقتصر عملنا على الدوال العددية، وبذلك فعندما نذكر دالة نقصد بها دالة عددية، توجد دوال خاصة، أي لها أسماء معينة ونتعامل معها كثيراً في دراستنا ووجدنا هنا وضع مفاهيم لبعض هذه الدوال.

نعلم أن $(\overset{\cdot}{\text{ح}}, +, \cdot)$ حلقة تبديلية تحتوي على العنصر المحايد ١ كما أن الزمرة الإبدالية $\overset{\cdot}{\text{ح}}$ تكون فضاء متجهات فوق الحقل $\overset{\cdot}{\text{ح}}$ مع وجود الضرب القياسي. فبذلك فإن الدالة $I \ni \overset{\cdot}{\text{ح}}$ دالة الذاتية تلعب دوراً في تعاريفنا القادمة.

نرمز إلى I . I.....I (ن من المرات حيث ن \geq ط) بالرمز I^n لذا فإن

$I^n \ni \check{C}$ لأنها بعملية الضرب تكون نصف زمرة إبدالية.

فعلیہ Iⁿ: س ← ح بجیٹ سⁿ = س س^{*} . س^{*} . س^{*} =
 (س^{*})I (س^{*})I . (س^{*})I = Iⁿ (س^{*}) لکل س^{*} ⊃ س.



وبما أن الزمرة الإبدالية \dot{S} تكون فضاء متجهات فإن $R \cdot I \cdot \dot{S} \ni \dot{S}$ ، أي أن

$$R \cdot I \cdot \dot{S} : S \leftarrow \dot{S} \text{ بحيث}$$

$$R \cdot S \cdot \dot{S} = R \cdot I \cdot \dot{S} \cdot \dot{S} = (S \cdot \dot{S}) \cdot \dot{S}$$

فعلیه نستطيع أن نعطي التعريف التالي:

تعريف ٢-٢٣:

$$\text{لتكن } 0 = I \cdot P + I_{1-n} P + \dots + I_{1-n}^{1-n} P + I \cdot P$$

حيث $i = 0, 1, 2, \dots, n$ و $i \cdot P \ni \dot{S}$ وأن $n \ni P$ وأن $0 \neq$

فيقال أن الدالة 0 متعددة الحدود polynomial ويقال إن n درجة متعددة الحدود.

من الملاحظ أن $0 : S \leftarrow \dot{S}$ بحيث أن لكل $S \cdot \dot{S}$ في S يكون

$$0 \cdot (S \cdot \dot{S}) = (S \cdot \dot{S}) \cdot 0 = (S \cdot \dot{S}) \cdot (I \cdot P + I_{1-n} P + \dots + I_{1-n}^{1-n} P + I \cdot P)$$

$$= (S \cdot \dot{S}) \cdot I \cdot P + (S \cdot \dot{S}) \cdot I_{1-n} P + \dots + (S \cdot \dot{S}) \cdot I_{1-n}^{1-n} P + (S \cdot \dot{S}) \cdot I \cdot P$$

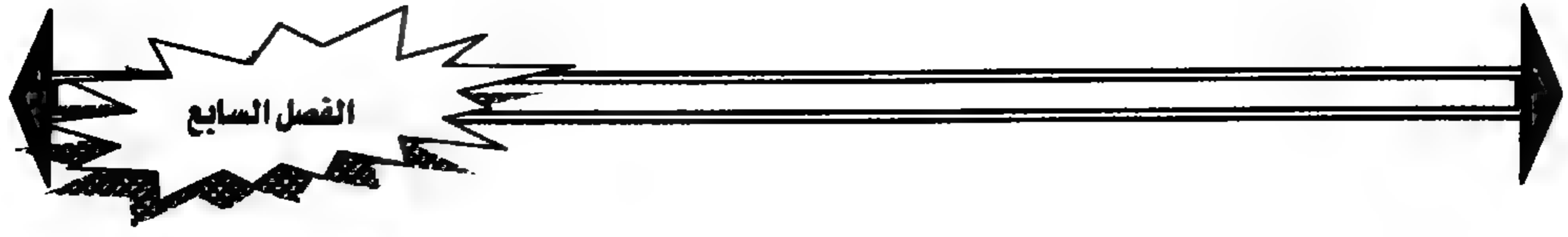
$$= I \cdot P \cdot S + I_{1-n} P \cdot S + \dots + I_{1-n}^{1-n} P \cdot S + I \cdot P \cdot S = (S \cdot \dot{S}) \cdot P$$

لذا فإن كل من $0 : S \leftarrow \dot{S}$ بحيث $0 \cdot (S \cdot \dot{S}) = (S \cdot \dot{S}) \cdot 0 = S \cdot \dot{S} \cdot P$ لكل $S \cdot \dot{S} \ni \dot{S}$.

و $0 : S \leftarrow \dot{S}$ بحيث $0 \cdot (S \cdot \dot{S}) = (S \cdot \dot{S}) \cdot 0 = S \cdot \dot{S} \cdot P - S \cdot \dot{S} \cdot P = 0$ لكل $S \cdot \dot{S}$ في S

حيث $S \ni \dot{S}$





و $\mathcal{U} : \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{H}$ بحيث $\mathcal{U}(\mathcal{S}) = \mathcal{E} - \mathcal{S}^2$ لكل \mathcal{S}^* في $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}^* : |\mathcal{S}^*| \geq 2\}$

و $\mathcal{V} = \{\mathcal{S}^* : \mathcal{S}^* \leq 0\}$ تكون متعددة الحدود.

بالاستعانة بتعريف ٢-١٧ نستطيع تعريف ما يلي:

تعريف ٢-٢٤:

لتكن $\mathcal{U}, \mathcal{H} \ni \mathcal{H}$ متعددة الحدود فيقال للدالة $\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{H}} : \mathcal{A} \leftarrow \mathcal{H}$ بالدالة النسبية Rational function، حيث أن $\mathcal{A} = \mathcal{S} - \{\mathcal{S}^* : \mathcal{S}^* \ni \mathcal{H}(\mathcal{S}^*) = 0\}$

نستطيع القول أن الدالة يمكن كتابتها على شكل $\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{H}}$ حيث كل من \mathcal{H} و \mathcal{U} متعددة الحدود تسمى بالدالة النسبية.

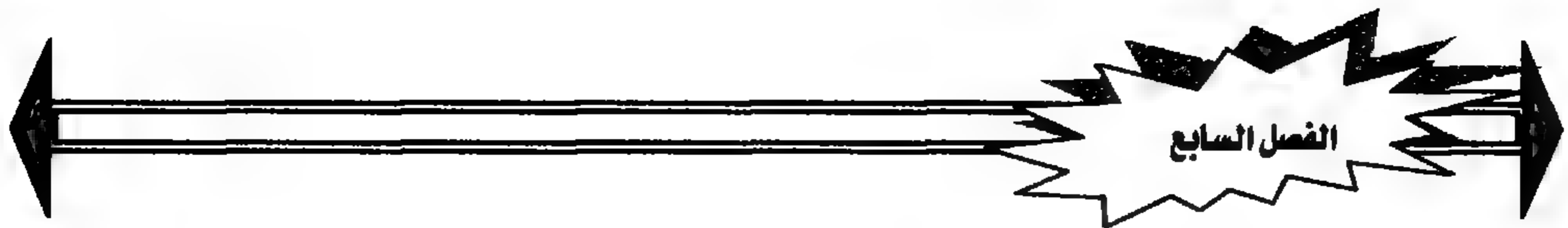
لذا فإن الدالة $\mathcal{H} : \mathcal{S} \leftarrow \mathcal{H}$ بحيث أن $\mathcal{H}(\mathcal{S}^*) = \frac{1 - \mathcal{S}^3}{\mathcal{S}^3 - \mathcal{S}^2 - 4}$ لكل \mathcal{S}^* في $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}^* : |\mathcal{S}^*| > 4\}$ تكون دالة نسبية.

حسب دراستنا السابقة لاحظنا وجود دوال غير نسبية $\mathcal{U} \ni \mathcal{H}$ بحيث $\mathcal{U}(\mathcal{S}^*) = \overline{\mathcal{S}^*}$ لكل \mathcal{S}^* في \mathcal{S} .

لكن هذه الدالة يمكن وضعها بعلاقة مع الدالة • ونستطيع القول أن $\mathcal{U}^2 - I = I - \mathcal{U}$ و لأن لكل \mathcal{S}^* في \mathcal{S} يكون $(I - \mathcal{U}^2)(\mathcal{S}^*) = (\mathcal{U} - \mathcal{U})(\mathcal{S}^*) = I(\mathcal{S}^*) = (\mathcal{U}(\mathcal{S}^*))^2 - \mathcal{S}^* = \mathcal{S}^* - \mathcal{S}^* = 0$

$$(\mathcal{U}(\mathcal{S}^*))^2 - \mathcal{S}^* = \mathcal{S}^* - \mathcal{S}^* = 0 = \mathcal{U}(\mathcal{S}^*)$$





إذا $u = I - I^2$

كما أن الدالة $u \in \mathcal{H}$ حيث أن $u = (s^*)$ $\frac{s^* + \sqrt{1 + s^{*2}}}{1 + s^{*2}}$ لكل s^*

في s تكون دالة غير نسبية.

$$u = (1 + I - I^2) + u(I \cdot 2 + I^2 \cdot 2) - I^2(1 + I)$$

لأن كل s^* في s يكون $(I + I^2)(I \cdot 2 + I^2 \cdot 2) - I^2(1 + I)$ $((1 + I - I^2)(s^*))$

$$= (s^* + \sqrt{1 + s^{*2}}) - (1 + I - I^2)(s^*) = (1 - s^* - s^{*2})$$

$$(1 + s^{*2}) - \left[\frac{s^* + \sqrt{1 + s^{*2}}}{1 + s^{*2}} \right] (1 + s^{*2}) =$$

$$+ \frac{s^* + \sqrt{1 + s^{*2}}}{1 + s^{*2}} = (1 - s^* - s^{*2}) + \left[\frac{s^* + \sqrt{1 + s^{*2}}}{1 + s^{*2}} \right]$$

$$s^* + \sqrt{1 + s^{*2}} - 1 + s^{*2} - s^{*2} + s^* - 1 - s^* - s^{*2} = 0 = 0 = 0 = 0$$

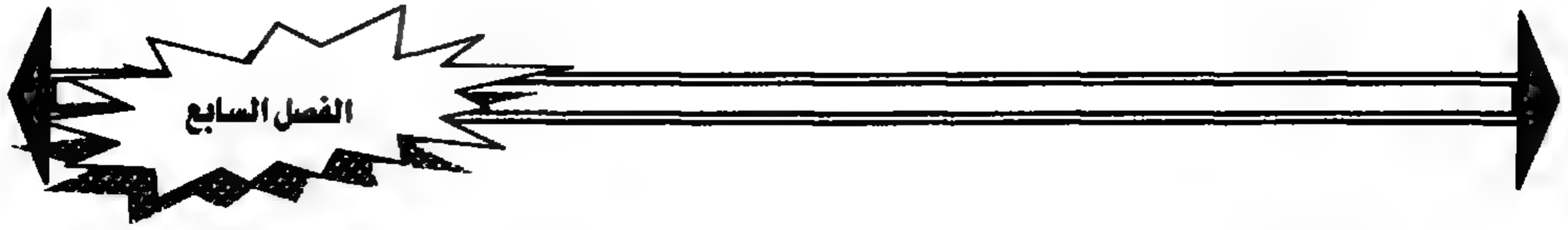
تعريف ٢-٢٤:

يقال للدالة $u \in \mathcal{H}$ دالة جبرية Algebraic function:

توجد $m, n, \dots, 1, m \in \mathcal{H}$ متعددة الحدود حيث $n \in \mathcal{H}$ و $m \neq 0$ بحيث

$$m^n + u m^{n-1} + \dots + u^{n-1} m + 1 = 0$$





لذا فإن كل من الدالتين في المثالين السابقين تكون دالة جبرية

لتكن $U \ni x$ بحيث أن $U(x) = |x|$ لكل x في S تدعى هذه

الدالة بدالة القيمة المطلقة Absolute value function

ويمكننا كتابة هذه الدالة بطريقة أخرى $U : S \rightarrow R$ بحيث أن

$$U(x) = \begin{cases} -x : x > 0 \\ x : x \leq 0 \end{cases} \text{ لكل } x \text{ في } S$$

لتكن $h : S \rightarrow R$ بحيث $h(x) = \sqrt{x^2}$ لكل x في S هل $U = h$ ؟

ملاحظة: ربما يخطئ القارئ عندما يقول أن $\sqrt{x^2} = x$ لأن من الواضح عندما تكون $x > 0$ فإن الطرف الأيمن يكون سالب بينما الطرف الأيمن هو موجب عندما تكون $x \leq 0$ فإن من الواضح $h(x) = \sqrt{x^2}$ لكن عندما تكون $x > 0$ فإن $h(x) = \sqrt{x^2} = x = -x$

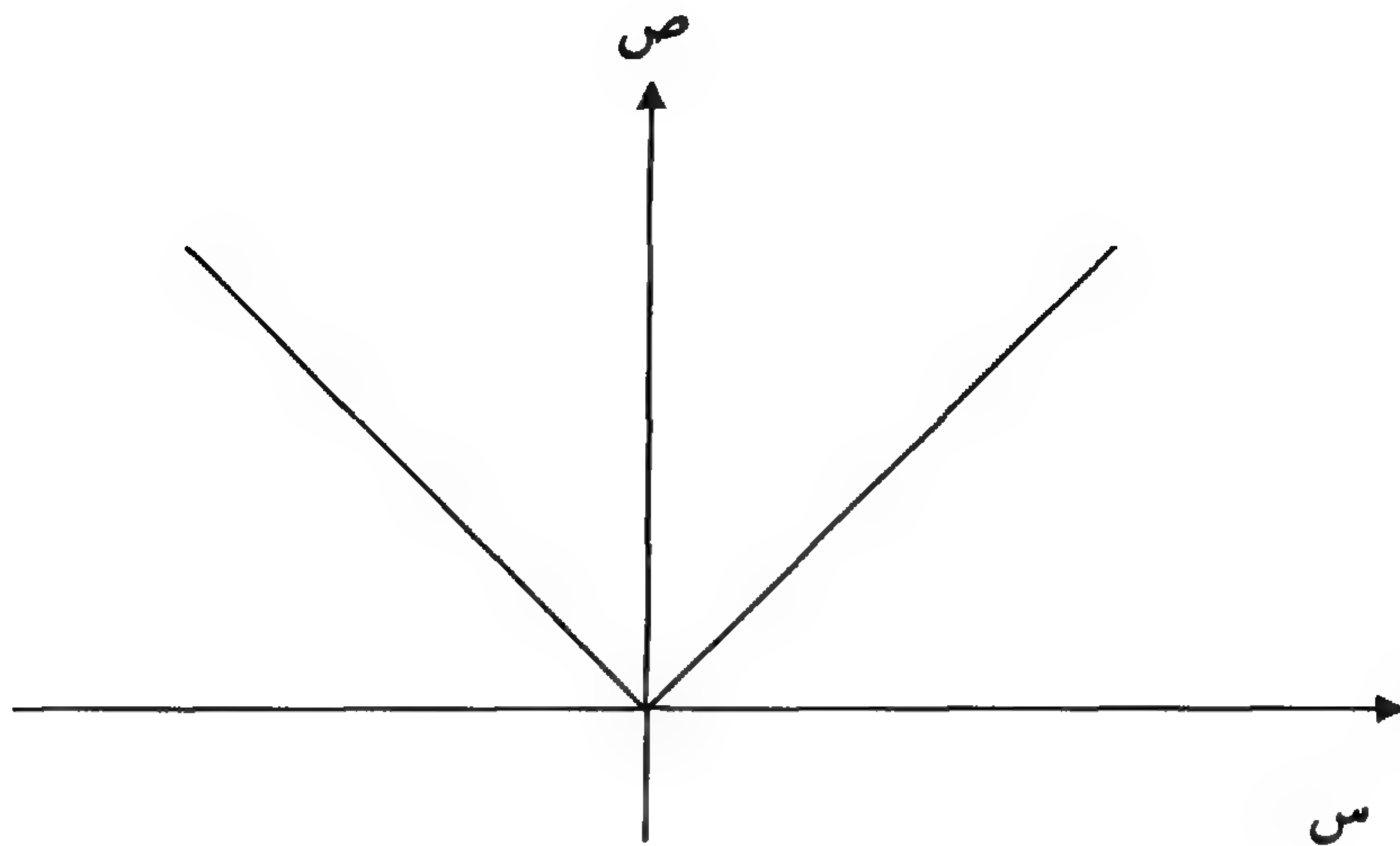
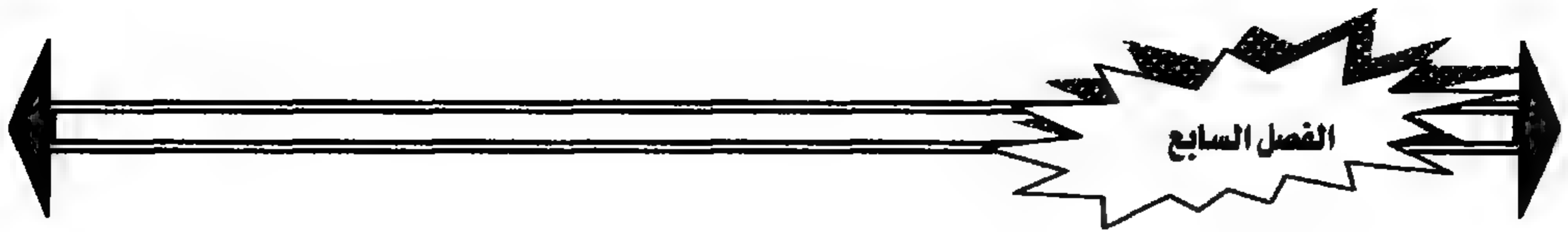
لذا فإن الدالة h يمكن أن تأخذ صيغة U وبذلك فإن $U = h$ فعليه فإن

$$U(x) = \sqrt{x^2} = \begin{cases} -x : x > 0 \\ x : x \leq 0 \end{cases} \text{ ومن الممكنة برهنة } U = \sqrt{x^2}$$

لذا فإن هذه الدالة ستكون دالة جبرية.

أما مخطط الدالة فيكون كما في الشكل ٢-٨





(٨-٢)

نظرية ٢-٢٥:

كل دالة نسبية تكون دالة جبرية.

البرهان: لتكن $\frac{P}{Q} \in \mathbb{R}[x]$ دالة جبرية، فيمكن كتابتها على شكل $\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$

حيث $m, n \in \mathbb{R}[x]$ وكل منها متعددة الحدود، إذاً

$m - n = 0$ فعليه تكون $\frac{P}{Q}$ دالة جبرية.



تعريف ٢-٢٦:

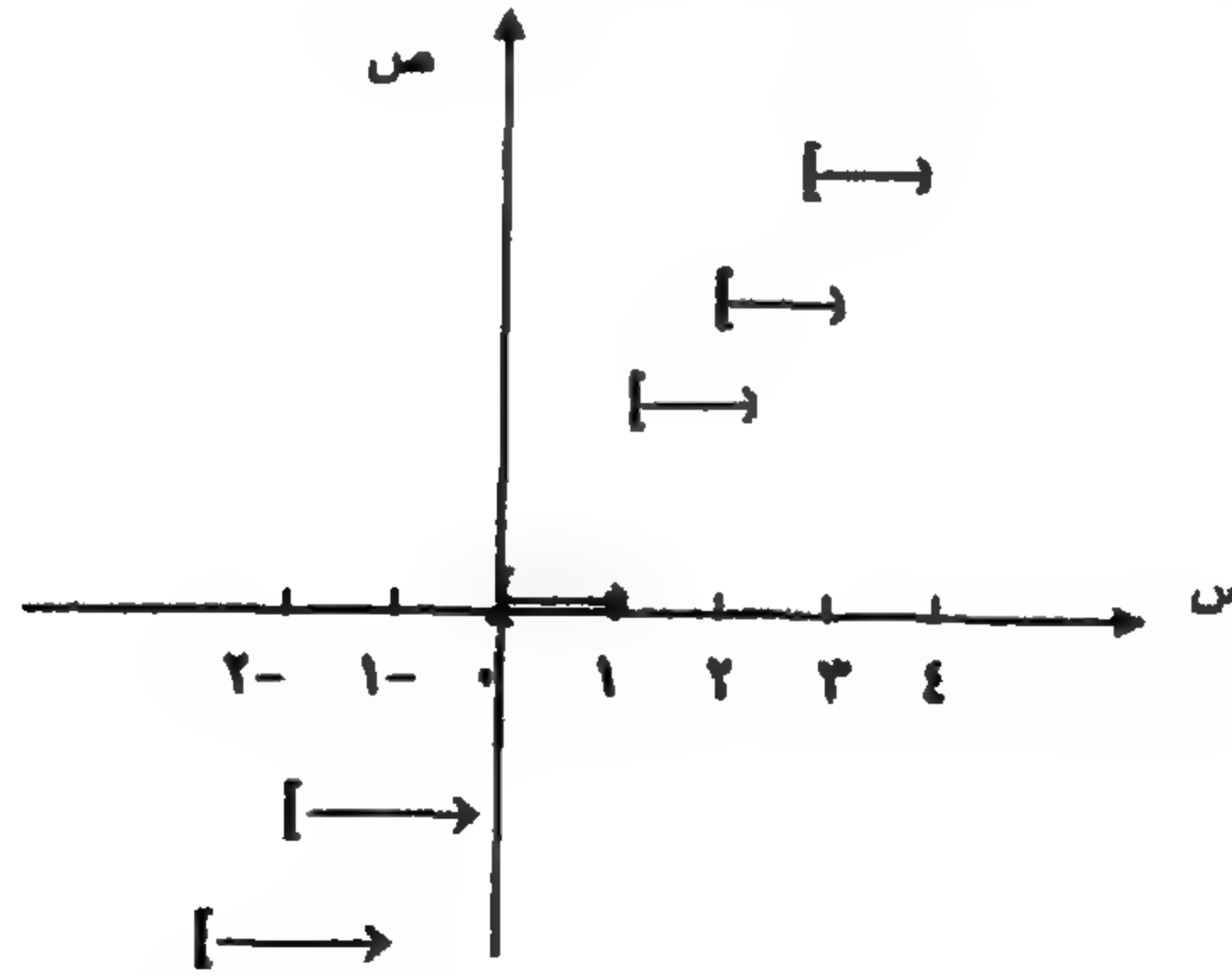
لتكن $W \ni \tilde{C}$ إذا لم تكن W دالة جبرية فتدعى بالدالة المتسامية
Transcendental function.

وكمثال على هذا النوع من الدوال

(نعلم من تمرين ٦ في الأعداد الحقيقية: إذا كان s^* عدد حقيقي فيوجد عدد صحيح $[s^*]$ بحيث أن $n \geq s^* > n+1$ يرمز اعتيادياً إلى n بالرمز $[s^*]$ ولذلك نستطيع القول لكل عدد حقيقي s^* يوجد عدد صحيح $[s^*]$ بحيث $([s^*] \leq s^* < [s^*] + 1)$

الدالة W التي $W \ni \tilde{C}$ بحيث $q(s^*) = [s^*]$ لكل $s^* \ni C$.

ونخطط هذه الدالة يكون كما في شكل ٢-٩.



شكل (٢-٩)

هذا وسنبحث موضوع الدوال المتسامية في بصورة تفصيلية.

”تمارين”

١- لتكن $\mathcal{U} : \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}$ بحيث أن $\mathcal{U}(s) = s^2 + 1$ لكل $s \in \mathcal{C}$.

ولتكن $\mathcal{H} : \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}$ بحيث أن $\mathcal{H}(s) = s^2 - 2$ لكل $s \in \mathcal{C}$.
أوجد كل من $\mathcal{H} \circ \mathcal{U}$ و $\mathcal{U} \circ \mathcal{H}$ ؟ وهل أن $\mathcal{H} \circ \mathcal{U} = \mathcal{U} \circ \mathcal{H}$ ؟

٢- لتكن $\mathcal{U} \ni \mathcal{V}$ ولتكن $\mathcal{H} \ni \mathcal{E}$ برهن على أن:

(أ) إذا كانت كل من \mathcal{U} و \mathcal{H} دالة شاملة فإن $\mathcal{H} \circ \mathcal{U}$ دالة شاملة.

(ب) إذا كانت كل من \mathcal{U} و \mathcal{H} دالة متباينة، فإن $\mathcal{H} \circ \mathcal{U}$ دالة متباينة.

(ج) ماذا نستطيع القول عند معكوس العبارتين أ و ب.

٣- لتكن $\mathcal{U} \ni \mathcal{V}$ ولتكن $\mathcal{H} \ni \mathcal{E}$ بحيث أن $\mathcal{H} \circ \mathcal{U} = I$ برهن أن \mathcal{U} متباينة و \mathcal{H} شاملة.

ولو كان $\mathcal{H} \circ \mathcal{U} = I$ فبرهن أن كل من \mathcal{U} و \mathcal{H} متقابلة.

٤- يقال إلى $\mathcal{U} \ni \mathcal{V}$ دالة زوجية عندما $\mathcal{U}(s) = \mathcal{U}(-s)$ لكل $s \in \mathcal{C}$.
 $\mathcal{U} \in \text{even function}$ ، ويقال إنها دالة فردية عندما $\mathcal{U}(s) = -\mathcal{U}(-s)$ لكل $s \in \mathcal{C}$.
 $\mathcal{U} \in \text{odd function}$.

(أ) هل توجد دالة فردية وزوجية معاً؟ ولماذا؟

(ب) هل توجد دالة لا تكون فردية ولا زوجية معاً؟

(ج) ليكن $S = \{s^* : s^* \leq 0\}$ فماذا نستطيع القول عن الدالة \vee

$\ni \check{C}$ بحيث أن $\vee (s^*) = s^*$ لكل $s^* \ni s$ ، هل هي زوجية أم فردية أم لا تكون؟

(د) ليكن $S = \{s^* : |s^*| \geq 0\}$ مجموعة جزئية في \check{C} ماذا نستطيع

القول عن الدالة \vee في \check{C} إذا حققت أحد الشروط التالية لكل:

$\vee (s^*) = s^*$ ، $\vee (s^*) = |s^*|$ ، $\vee (s^*) = 3s^*$ ، $\vee (s^*) = 5$

$\vee (s^*) = \left\{ \begin{array}{l} 1 : s^* \text{ عدد نسبي} \\ 2 : s^* \text{ عدد غير نسبي} \end{array} \right\}$

(هـ) هل مجموع دالتين زوجية تكون دالة زوجية؟ ولماذا؟

(و) هل ضرب دالتين زوجية تكون دالة زوجية؟ ولماذا؟

(ز) هل مجموع دالتين فردية تكون دالة فردية؟ ولماذا؟

(ح) هل ضرب دالتين فردية تكون دالة فردية؟ ولماذا؟

(ط) لتكن $\vee \ni \check{C}$ و \vee ولتكن كل من \vee و \vee دالة فردية، فبرهن أن $\vee \vee$ دالة فردية.

٥- أي من الدوال تكون جبرية، وأي منها تكون متسامية، وإن كانت جبرية فأي منها متعددة الحدود وأي منها نسبية؟

(أ) $\mathcal{U} \ni \mathcal{C}$ بحيث أن $\mathcal{U}(*s) = 3 - \sqrt{2}$ لكل $s \in \mathcal{C}$

(ب) $\mathcal{U} \ni \mathcal{C}$ بحيث أن $\mathcal{U}(*s) = 3 - \sqrt{2}$ لكل $s \in \mathcal{C}$

(ج) $\mathcal{U} \ni \mathcal{C}$ بحيث أن $\mathcal{U}(*s) = \frac{\sqrt{2}}{2-s}$ لكل $s \in \mathcal{C}$ في $\mathcal{C} = \{s \in \mathcal{U} : s \neq 2\}$

(د) $\mathcal{U} \ni \mathcal{C}$ بحيث أن $\mathcal{U}(*s) = \frac{|s|}{s+1}$ لكل $s \in \mathcal{C}$ في $\mathcal{C} = \{s \in \mathcal{U} : s \neq -1\}$

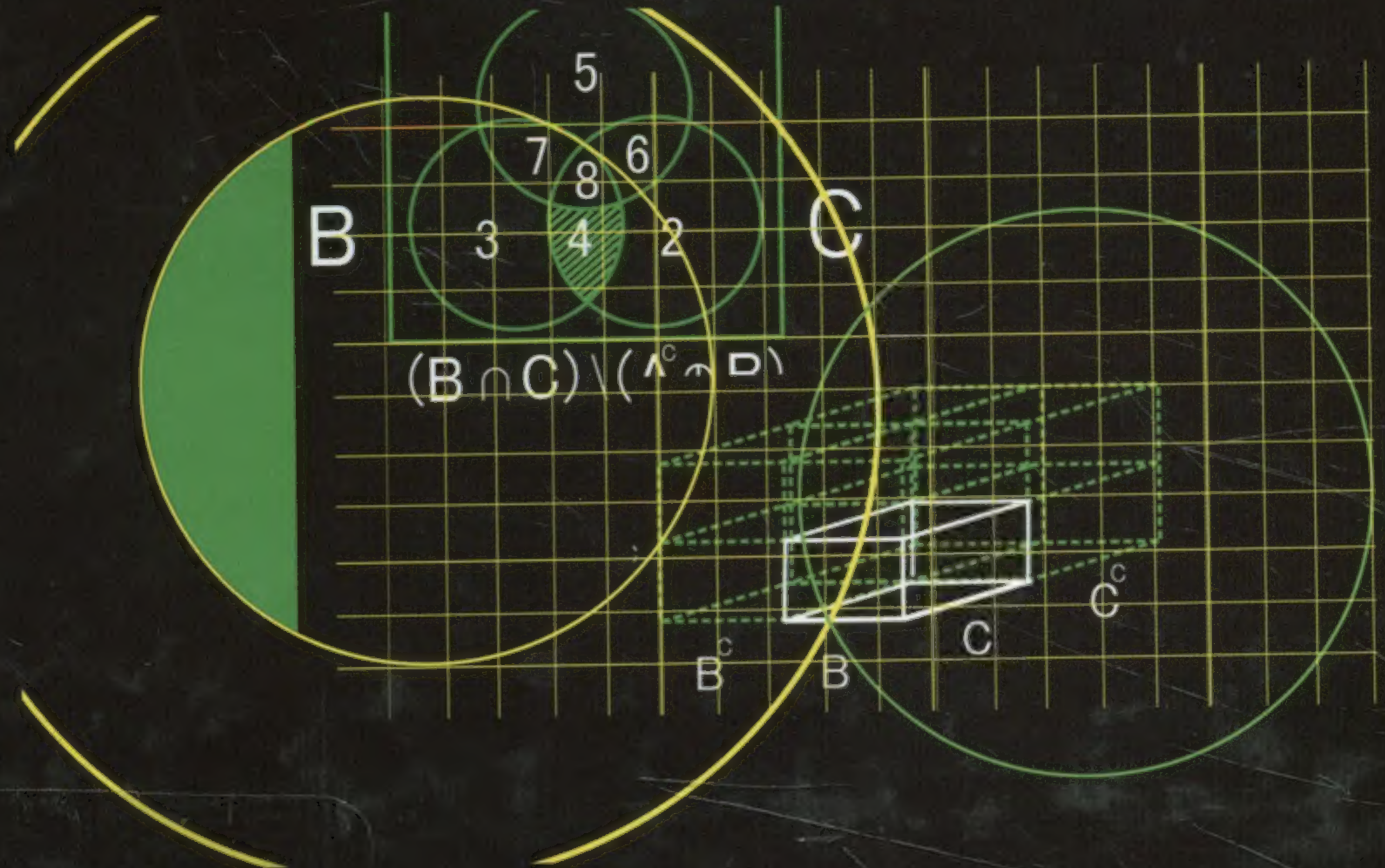
(هـ) $\mathcal{U} \ni \mathcal{C}$ بحيث أن $\mathcal{U}(*s) = \frac{|s|}{s}$ لكل $s \in \mathcal{C}$ في $\mathcal{C} = \{s \in \mathcal{U} : s \neq 0\}$: $s > 0$ أو $s \geq 1$ وارسم مخططاً لكل منهما.

٦- هـ، $\mathcal{U} \ni \mathcal{C}$ حيث $\mathcal{C} = \{s : |s| \geq 2\}$ ارسم مخططاً إلى كل من \mathcal{U} و \mathcal{H} وأي منهما يكون زوجي أو فردي حيث أن

$\mathcal{U}(*s) = s - [s]$ وأن $\mathcal{H}(*s) = s - [s^2]$ لكل

$s \in \mathcal{U}$

الرياضيات



دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع

المملكة الأردنية الهاشمية - عمان - شارع الملك حسين
مجمع الفحيص التجاري - هاتف: +962 6 4611169
تلفاكس: +962 6 4612190 ص ب 922762 عمان 11192 الأردن
E-mail: safa@darsafa.net www.darsafa.net

